



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA
Scuola di Ingegneria



Corso di
TECNICA DELLE COSTRUZIONI

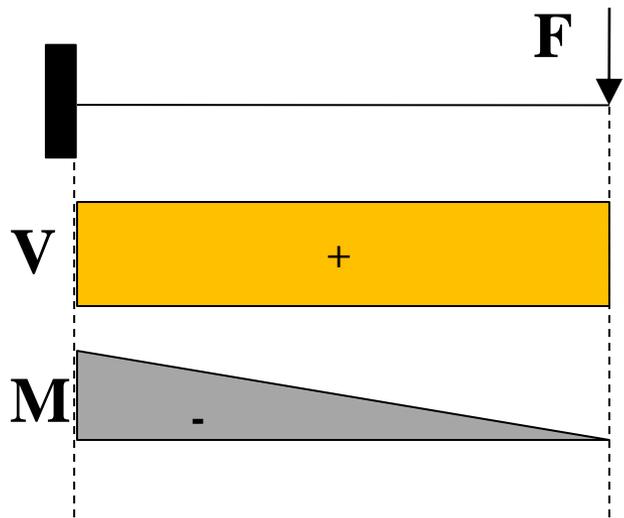
IL TAGLIO NELLE SEZIONI IN C.A.
ANALISI ELASTICA E STATO LIMITE ULTIMO

Docente:
Prof. Ing. Angelo MASI

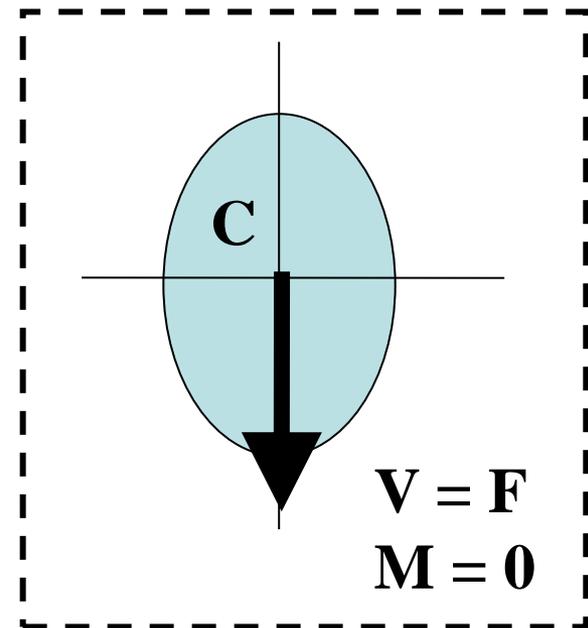
Collaboratori:
Ing. Vincenzo MANFREDI
Ing. Giuseppe VENTURA

La sollecitazione di TAGLIO

Una sezione di una trave risulta sollecitata a solo **taglio V** se, in assenza di momento flettente, la risultante delle azioni esterne F appartiene al piano della sezione e passa per un punto caratteristico C detto **CENTRO DI TAGLIO**



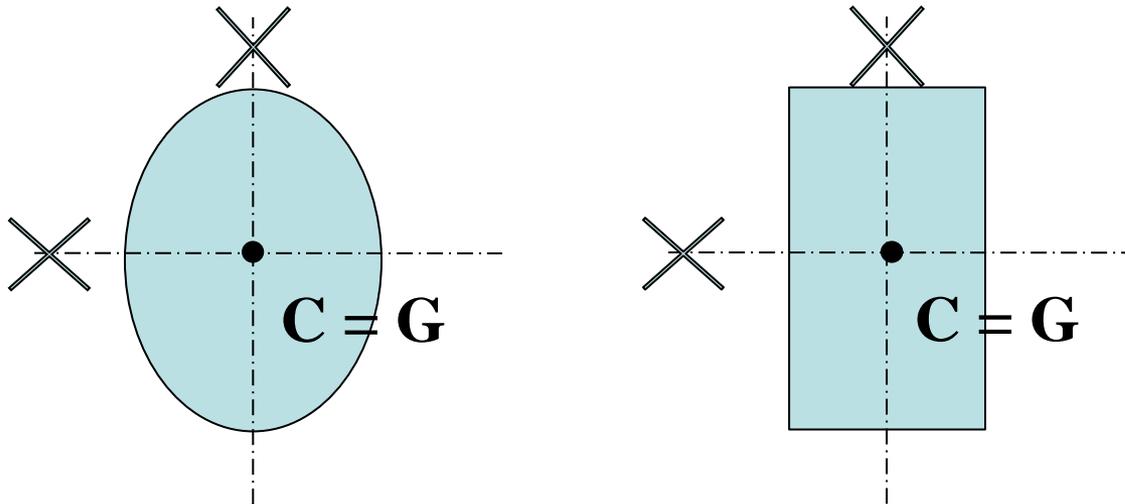
Sezione in cui è applicata F



La sollecitazione di TAGLIO

Posizione del CENTRO DI TAGLIO

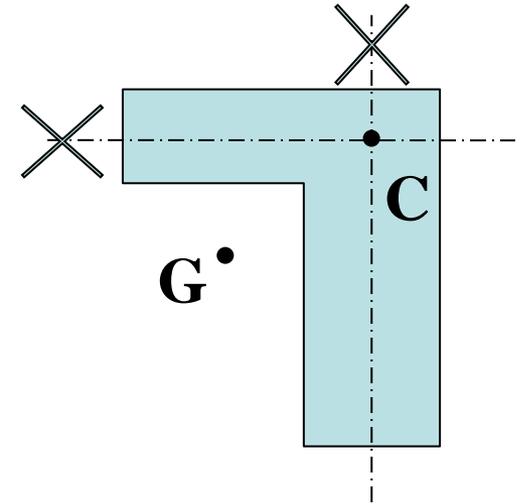
Regola 1: se una sezione è dotata di due assi di simmetria il loro punto di incontro è sia il baricentro geometrico G che il **Centro di Taglio C**



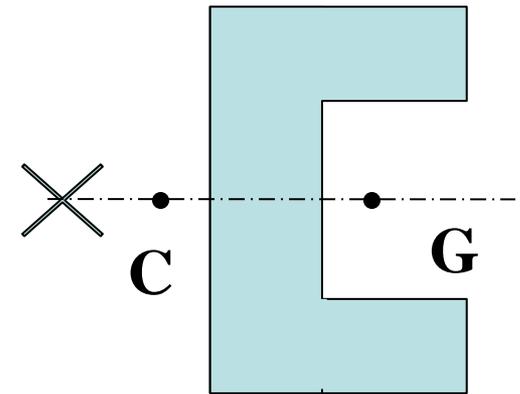
La sollecitazione di TAGLIO

Posizione del CENTRO DI TAGLIO

Regola 2: se in una sezione esiste un unico punto in cui si incontrano le linee medie dei diversi tratti in cui la sezione può essere suddivisa, tale punto è il **Centro di Taglio C** (che non coincide con G)

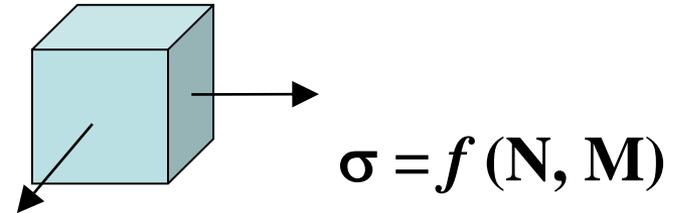


Regola 3: se una sezione ha un solo asse di simmetria su di esso si trovano sia il baricentro che il **Centro di Taglio C** (che non coincide con G)

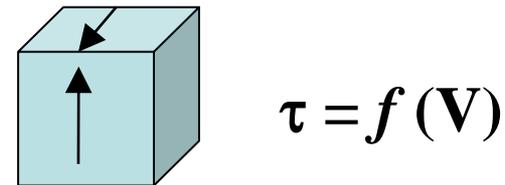


Le tensioni tangenziali

Alle sollecitazioni sforzo normale N e momento flettente M si associano tensioni normali, ossia tensioni che agiscono perpendicolarmente al piano cui sono applicate.



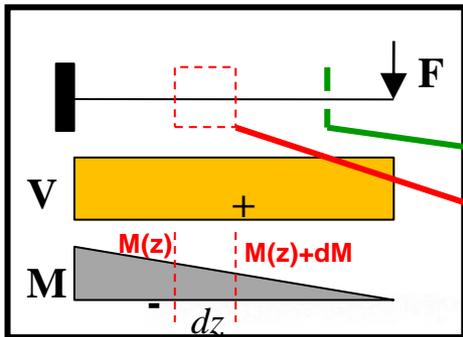
Alla sollecitazione taglio V si associano tensioni tangenziali, ossia tensioni che agiscono parallelamente al piano cui sono applicate.



Ai fini delle verifiche di sicurezza delle sezioni in c.a. gli effetti di V e di $(M + N)$ si valutano separatamente

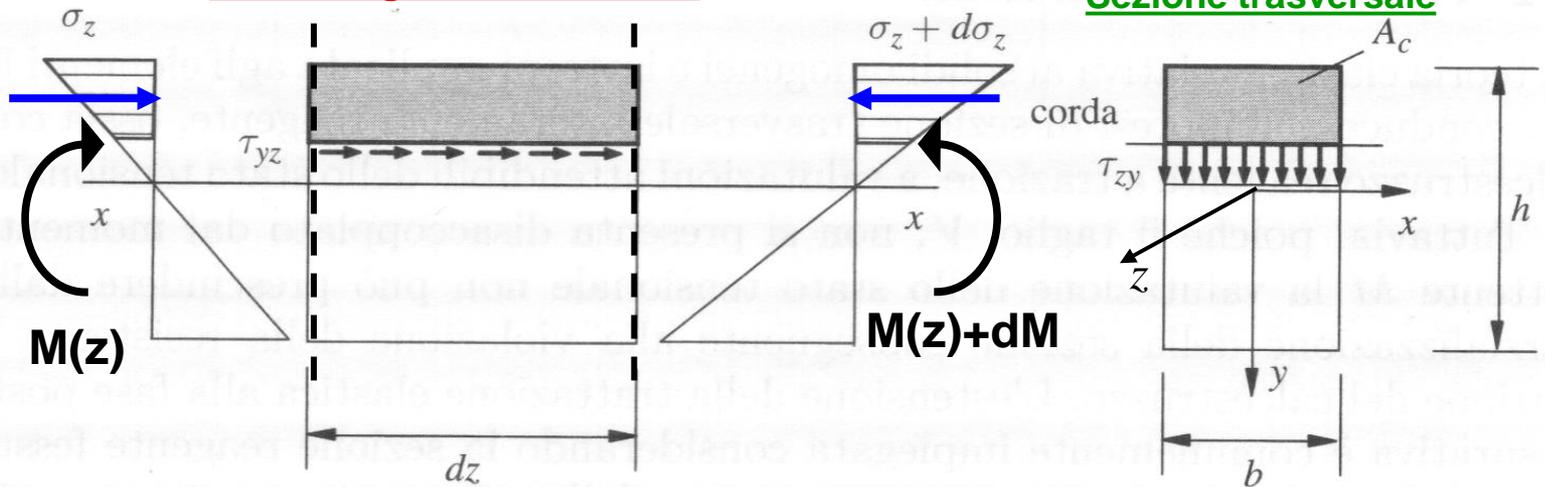
Le tensioni tangenziali

Le tensioni tangenziali τ possono essere determinate a partire dall'equilibrio alla traslazione (lungo l'asse delle trave z) delle forze agenti sul concio elementare di lunghezza dz .



Tratto longitudinale di trave

Sezione trasversale



Equilibrio alla traslazione lungo l'asse z

$$\int_{A_c} \sigma_z dA - \int_{A_c} (\sigma_z + d\sigma_z) dA + \tau_{yz} b dz = 0$$



$$\int_{A_c} d\sigma_z dA = \tau_{yz} b dz$$

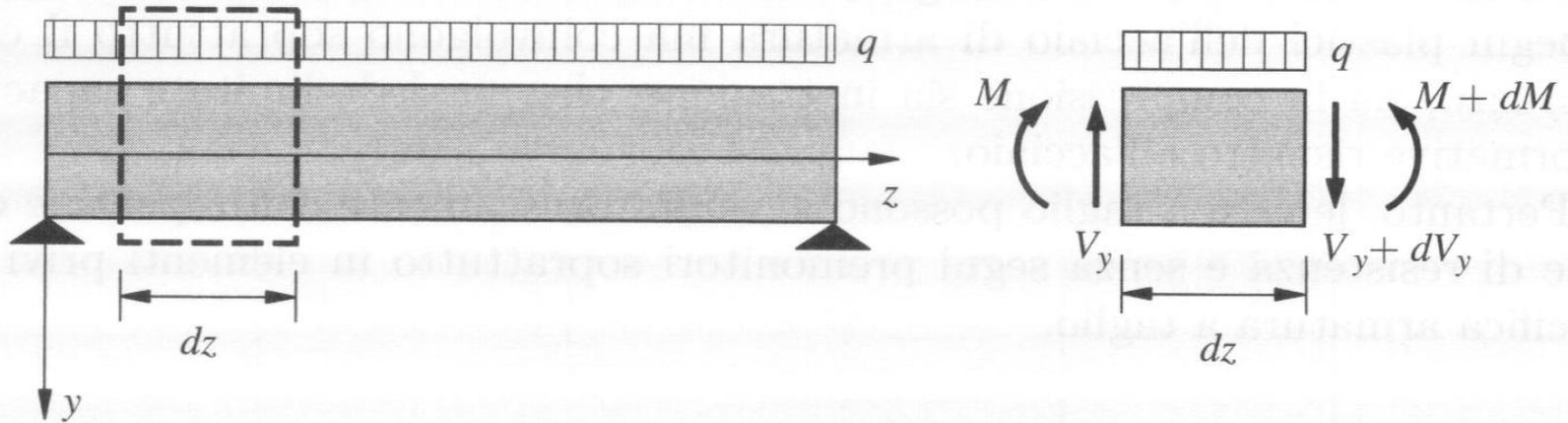
Le tensioni tangenziali

Dalla formula di Navier le tensioni normali σ_z possono essere scritte come:

$$d\sigma_z = \frac{dM}{I_x} y$$

ed inoltre dall'equilibrio alla rotazione del concio elementare:

$$dM = V_y dz$$



Le tensioni tangenziali. L'espressione di Jourawski

Le tensioni tangenziali τ_{yz} , ipotizzando un valore costante lungo la corda c-c (posta a distanza y dall'asse baricentrico x-x), sono valutate mediante l'espressione di Jourawski

$$dM = V_y dz$$

$$d\sigma_z = \frac{dM}{I_x} y$$

$$d\sigma_z = \frac{V_y dz}{I_x} y$$

Ricordando che:

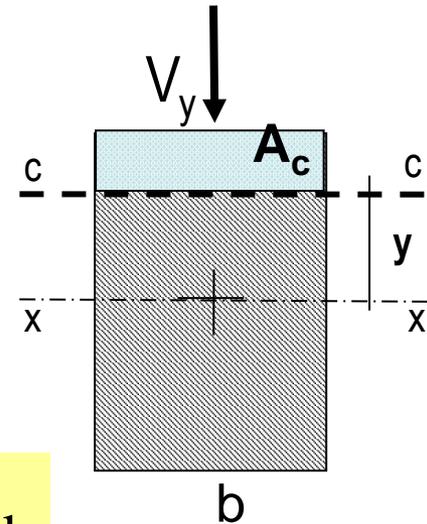
$$\int_{A_c} d\sigma_z dA = \tau_{yz} b dz$$

$$\int_{A_c} \frac{V_y dz}{I_x} y dA = \tau_{yz} b dz$$

S_x è il momento statico, rispetto all'asse baricentrico x-x, della parte di sezione reagente A_c al di sopra della corda c-c

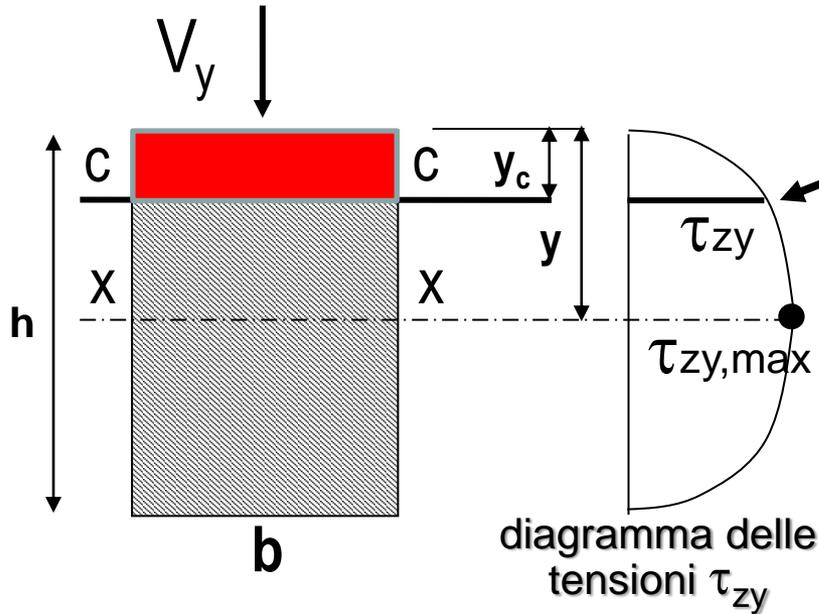
I_x è il momento di inerzia della sezione reagente rispetto all'asse baricentrico x-x

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{V_y}{I_x b} \int_{A_c} y dA = \frac{V_y S_x}{I_x b}$$



Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Distribuzioni delle tensioni tangenziali in una sezione omogenea interamente reagente



$$\tau_{zy} = \frac{V_y}{I_x} \frac{S_x}{b} = k S_x \quad (f(y_c^2)) \quad (\S)$$

I_x è il momento di inerzia della sezione reagente rispetto al suo asse baricentrico x-x:

$$I_x = b h^3 / 12 \rightarrow \text{cost}$$

S_x è il momento statico della parte di sezione reagente al di sopra della corda c – c in cui si calcola la τ :

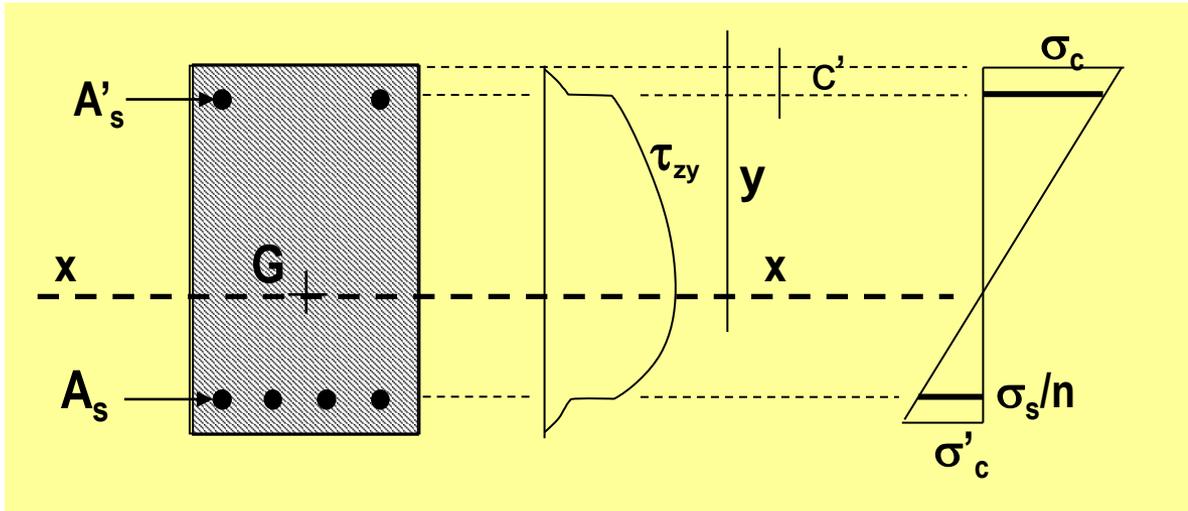
$$S_x(y_c) = b y_c (y - y_c/2) \rightarrow f(y_c^2)$$

$y = h/2$ (distanza del bordo superiore dall'asse baricentrico x-x)

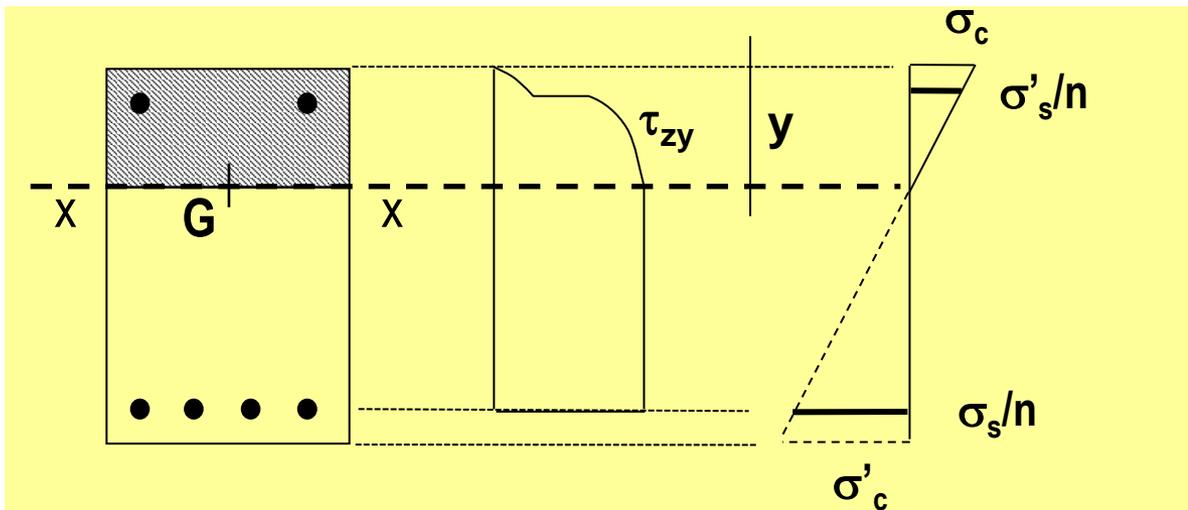
(§) Nelle sezioni rettangolari b è costante \rightarrow le tensioni tangenziali τ_{zy} hanno andamento parabolico

Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Per le sezioni in c.a. bisogna distinguere:



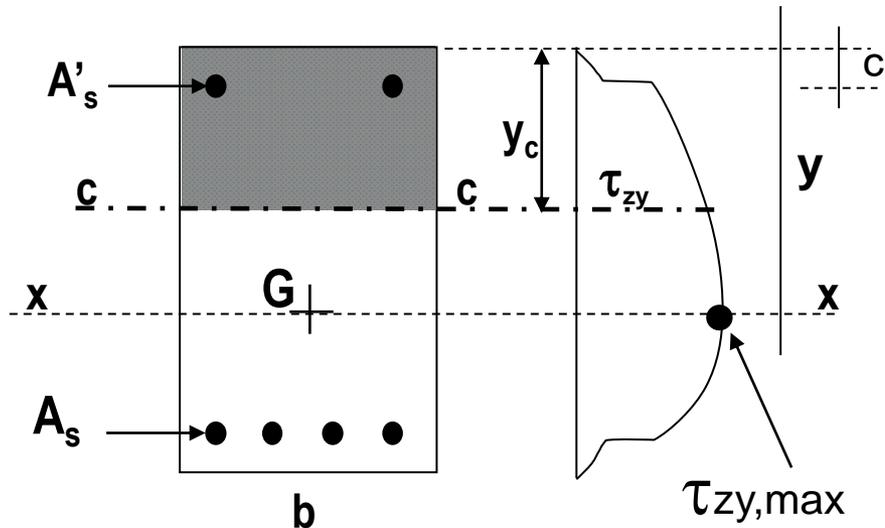
1) sezione interamente reagente (non parzializzata)



2) sezione parzializzata (CLS non reagente a trazione)

Calcolo elastico delle τ nel c.a. – Sezione interamente reagente

Distribuzione delle tensioni tangenziali in sezione rettangolare in c.a. con CLS reagente sia a compressione che a trazione (CLS non fessurato)



$$\tau_{zy} = \frac{V_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} = k \cdot S_x (f(y_c^2))$$

- S_x è il momento statico rispetto all'asse baricentrico x-x della sezione reagente di una delle parti della sezione separate dalla corda stessa:

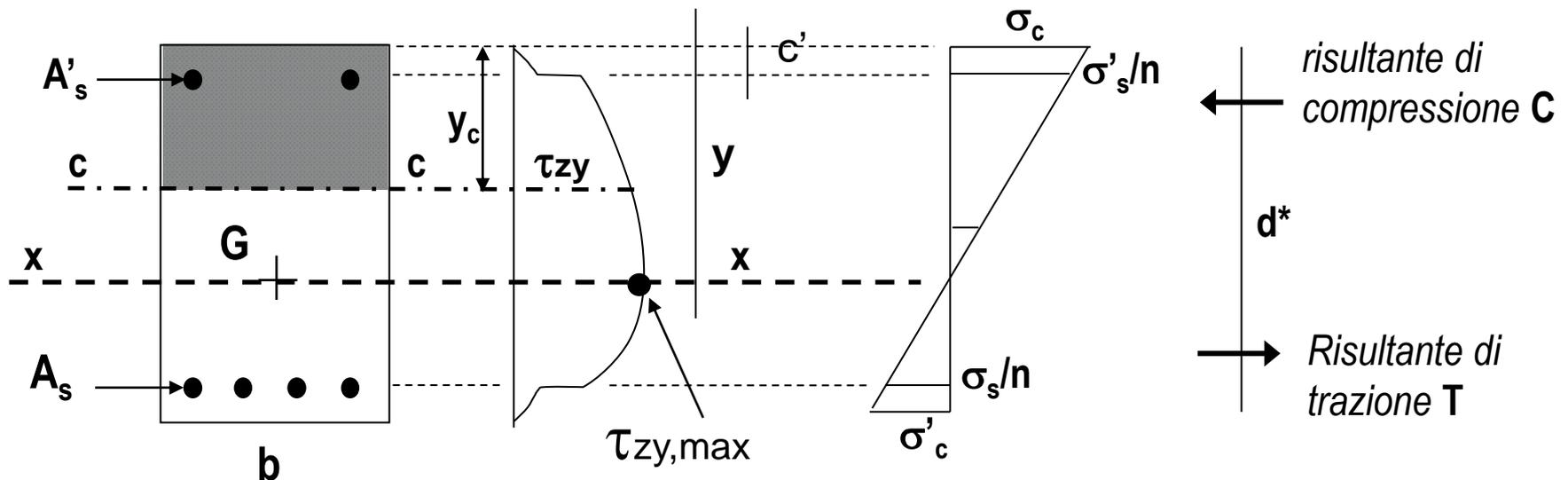
$$S_x(y_c) = b y_c (y - y_c/2) + n A'_s (y - c')$$

- I_x è il momento di inerzia baricentrico dell'intera sezione, incluso il CLS teso (non fessurato)

Calcolo elastico delle τ nel c.a. – Sezione interamente reagente

Distribuzione delle tensioni tangenziali in sezione rettangolare in c.a. con CLS reagente sia a compressione che a trazione (CLS non fessurato)

Le tensioni τ_{zy} assumono il valore massimo in corrispondenza della corda baricentrica x-x



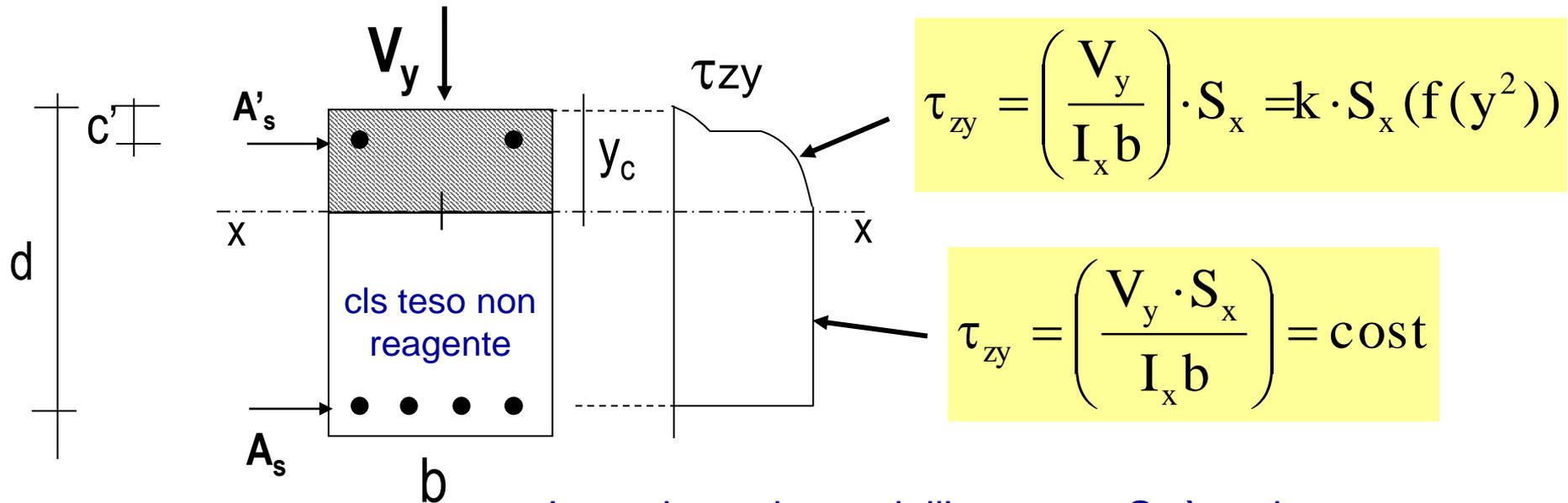
$$\tau_{\max} = \frac{V_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot b} = \frac{V_y}{d^* b}$$

$d^* = I_x / S_x^*$ è il braccio della coppia interna (distanza tra le risultanti di compressione C e trazione T , con $C = T$)

Calcolo elastico delle τ nel c.a. – Sezione parzializzata

Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate (**flessione semplice: x-x coincide con n-n**)

Nella distribuzione delle tensioni tangenziali si riconosce un tratto con andamento parabolico (in corrispondenza del cls compresso) e un tratto costante (in corrispondenza del cls teso non reagente: $\Delta S_x=0$)



In corrispondenza dell'asse x-x, S_x è pari a:

$$S_x = b \cdot y_c \cdot y_c / 2 + n \cdot A'_s \cdot (y_c - c') = n \cdot A'_s \cdot (d - y)$$

Calcolo elastico delle τ nel c.a. – Sezione parzializzata

Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate (**flessione semplice: x-x coincide con n-n**)

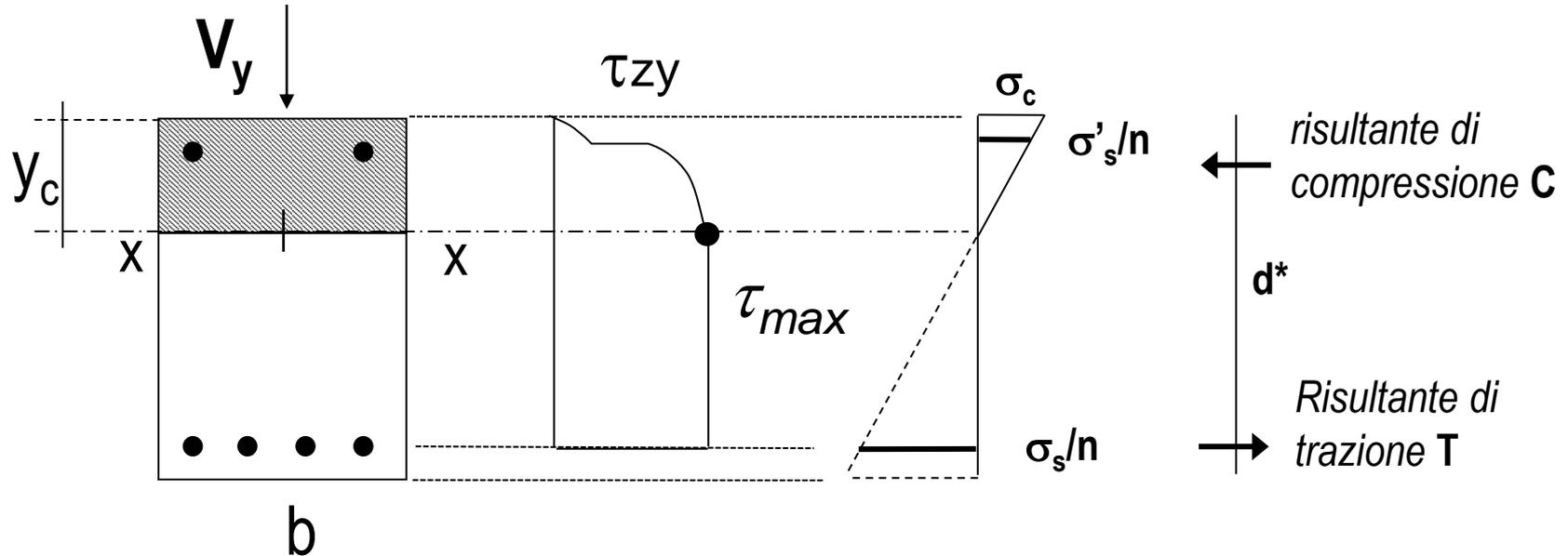
In corrispondenza della corda baricentrica si ha la tensione tangenziale massima τ_{max} :

$$\tau_{max} = \frac{V_y}{b \cdot d^*}$$

dove:

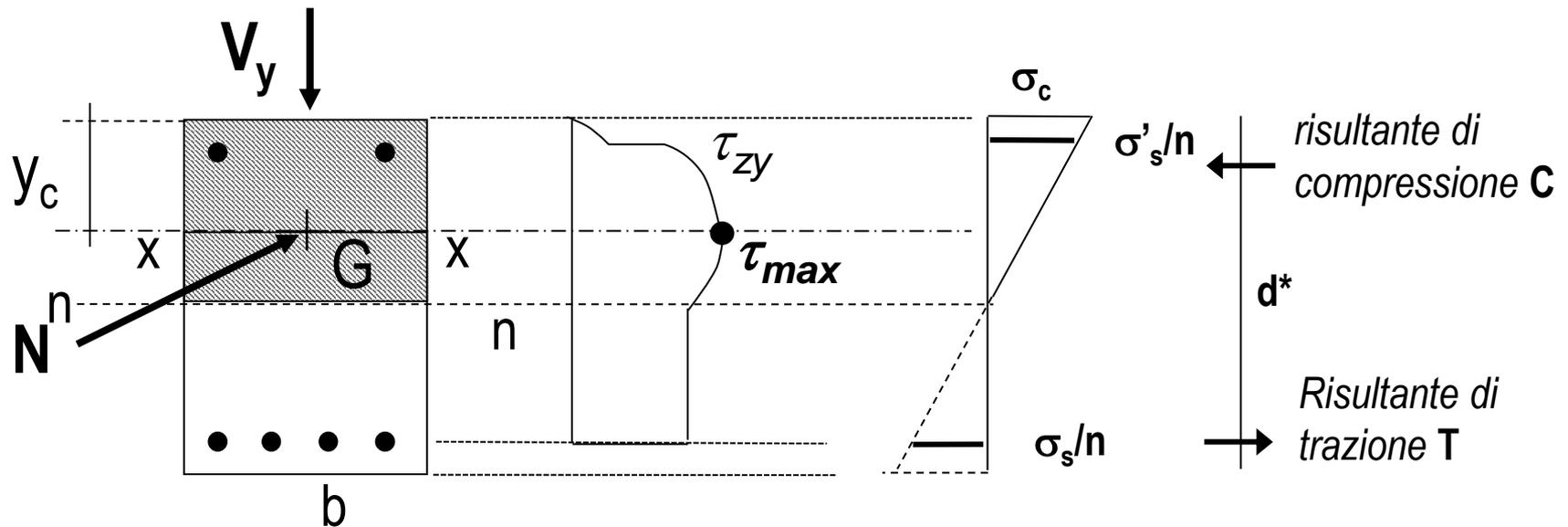
$$d^* = \frac{I_x}{S_x^*}$$

è il braccio della coppia interna



Calcolo elastico delle τ nel c.a. – Sezione parzializzata

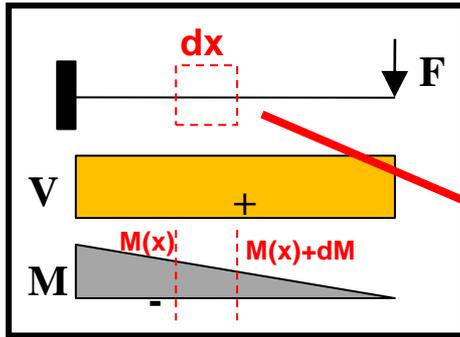
Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate (**flessione composta: x-x NON coincide con n-n**)



Le tensioni tangenziali massime sono valutate in corrispondenza dell'asse baricentrico x-x

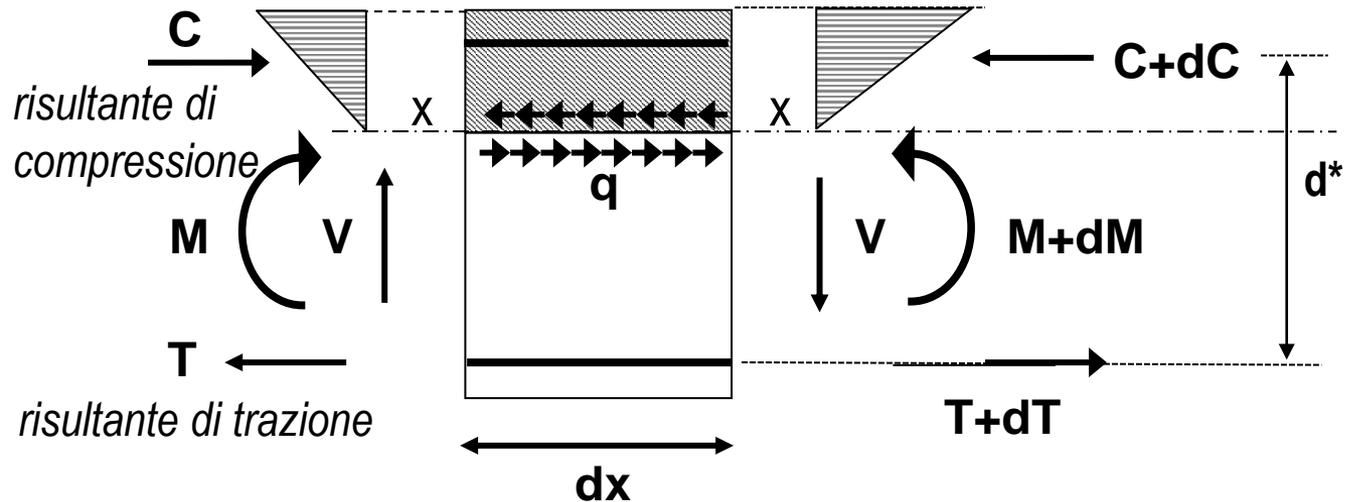
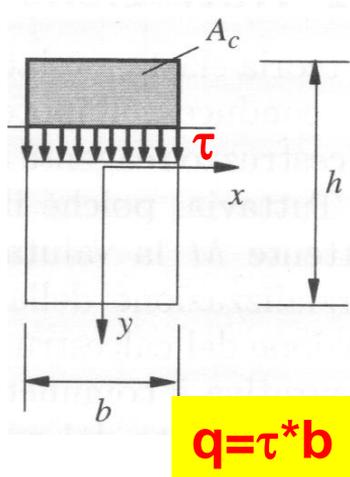
$$\tau_{max} = \frac{V_y}{b \cdot d^*}$$

Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico



Si consideri un concio di trave di lunghezza dx soggetto al momento M ed al taglio V .
Vale la relazione:

$$V_y = \frac{dM}{dx}$$



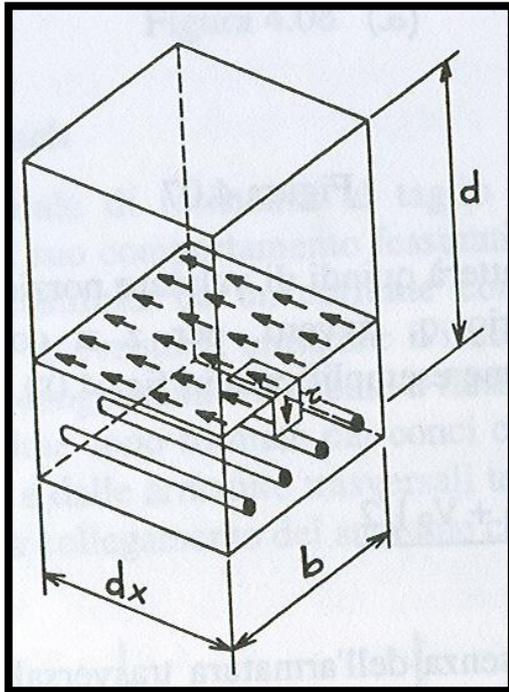
Considerando la parte di concio in corrispondenza dell'asse baricentrico, si può scrivere la seguente relazione di equilibrio:

$$q dx = dC = dT = \frac{dM}{d^*} = \frac{V_y}{d^*} dx$$

Le sollecitazioni di taglio. Generalità

La grandezza q è definita *forza di scorrimento unitaria*.

Essa può anche essere vista come risultante delle tensioni tangenziali τ sulla superficie orizzontale:



$$q dx = \tau \cdot b \cdot dx = \frac{V_y S_x}{I_x b} b dx$$



$$q = \frac{V_y S_x}{I_x}$$

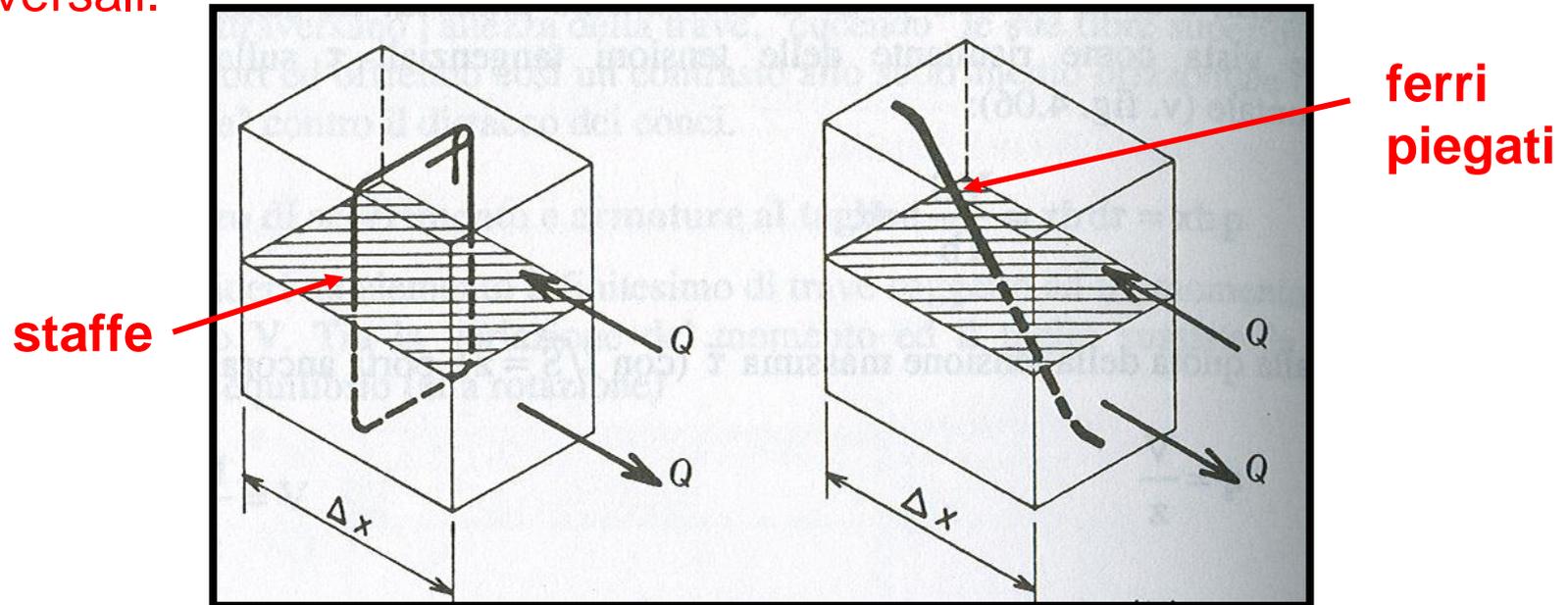
In corrispondenza della tensione massima τ_{\max} si ha che:



$$q = \frac{V}{d^*}$$

Le sollecitazioni di taglio. Generalità

Per resistere agli sforzi di taglio vengono disposte apposite armature trasversali.



Poiché le armature a taglio vengono distribuite con un certo passo Δx ognuna di esse porta una quota parte di forza di scorrimento Q , pari a:

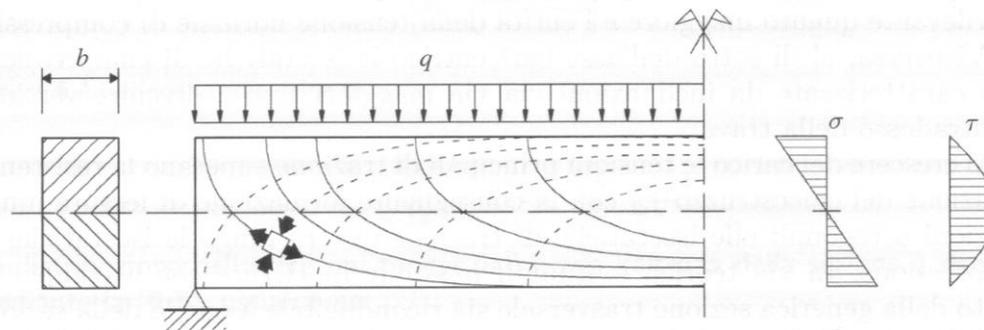
$$Q = \int_x^{x+\Delta x} q dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{V}{d^*} dx$$

Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

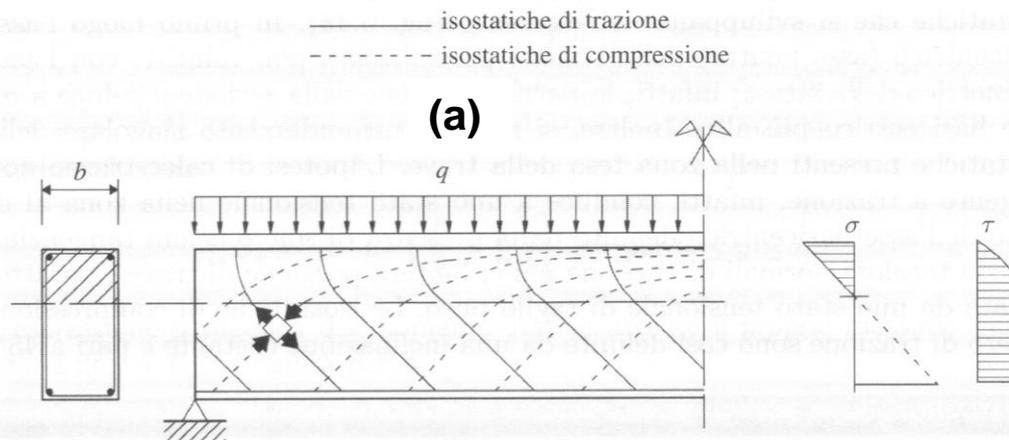
Isostatiche di compressione e di trazione di una trave inflessa sottoposta a un carico uniformemente distribuito nel caso di:

(a) sezione omogenea interamente reagente

(b) sezione parzializzata



(a): Sezione interamente reagente



(b): Sezione parzializzata

(b)

Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

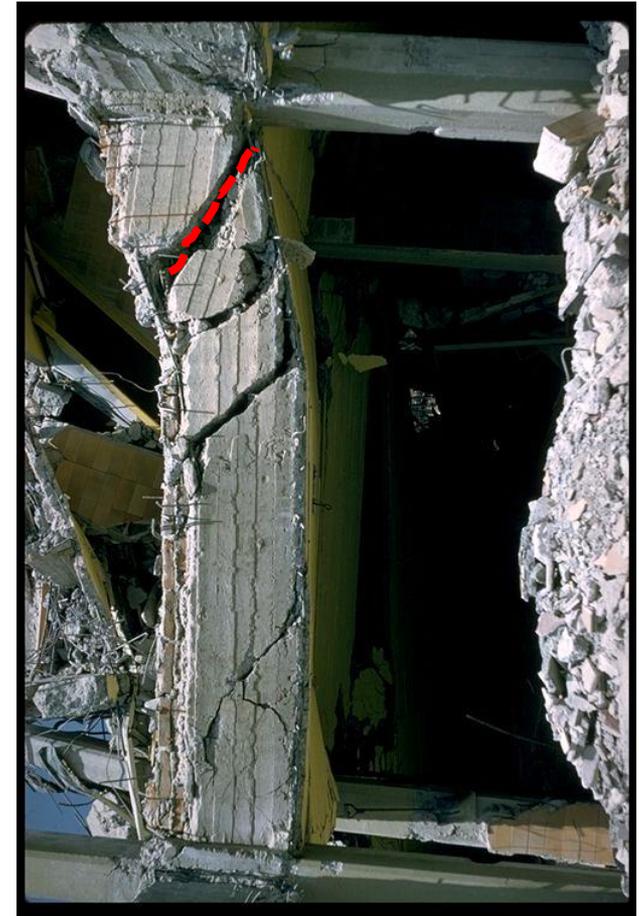
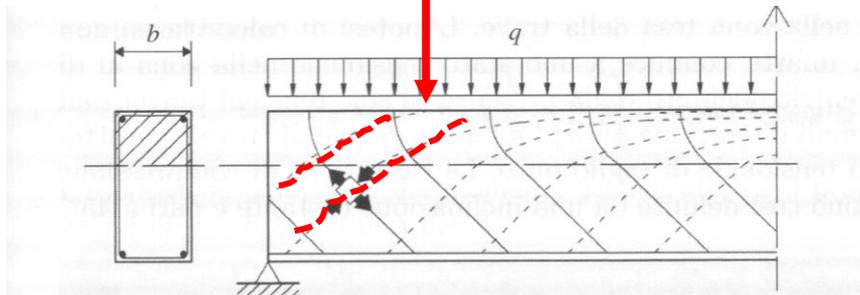
L'esame dello STATO LIMITE ULTIMO di un elemento in c.a. soggetto a TAGLIO va effettuato tenendo conto che la rottura per taglio è in realtà una rottura combinata per flessione e taglio - e spesso anche per sforzo normale e torsione - la cui esatta valutazione è particolarmente complessa.

Tale tipo di rottura è particolarmente pericolosa poiché **determina un rapido DEGRADO dell'elemento strutturale riducendone considerevolmente le capacità duttili e provocando rotture repentine con spiccate caratteristiche di FRAGILITÀ**

Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

Esempi di collasso di elementi in c.a. per taglio

TRAVE

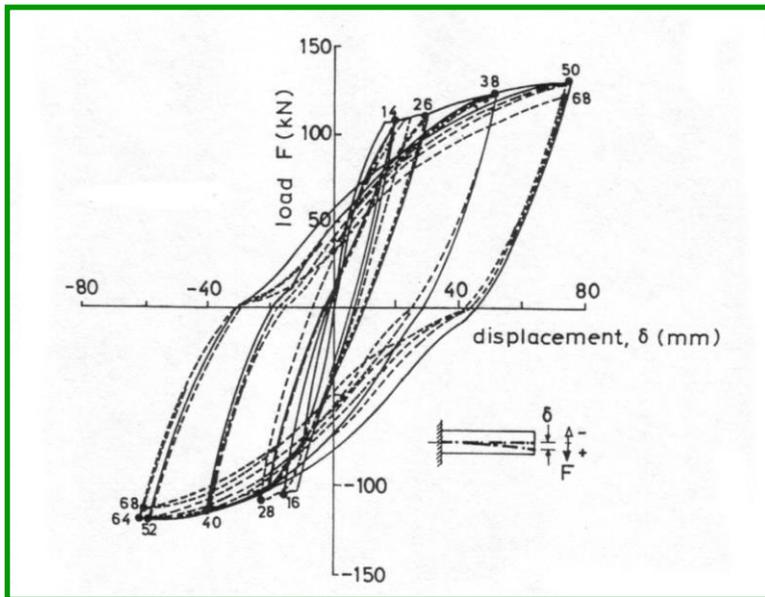
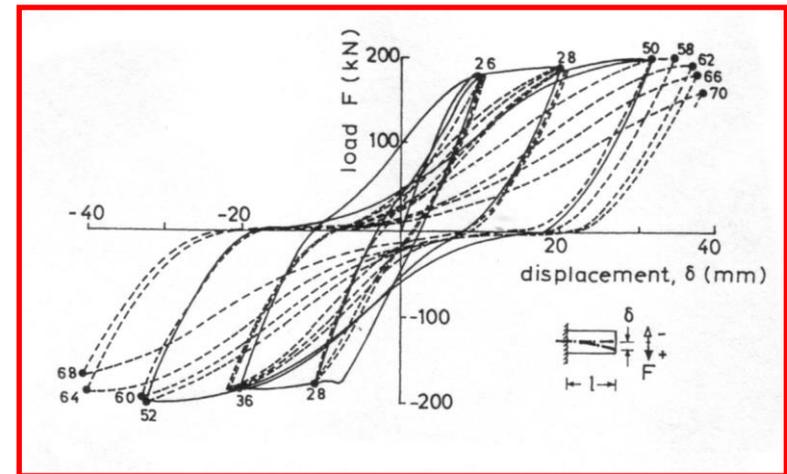


PILASTRO

Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

Comportamento ciclico delle travi in c.a.

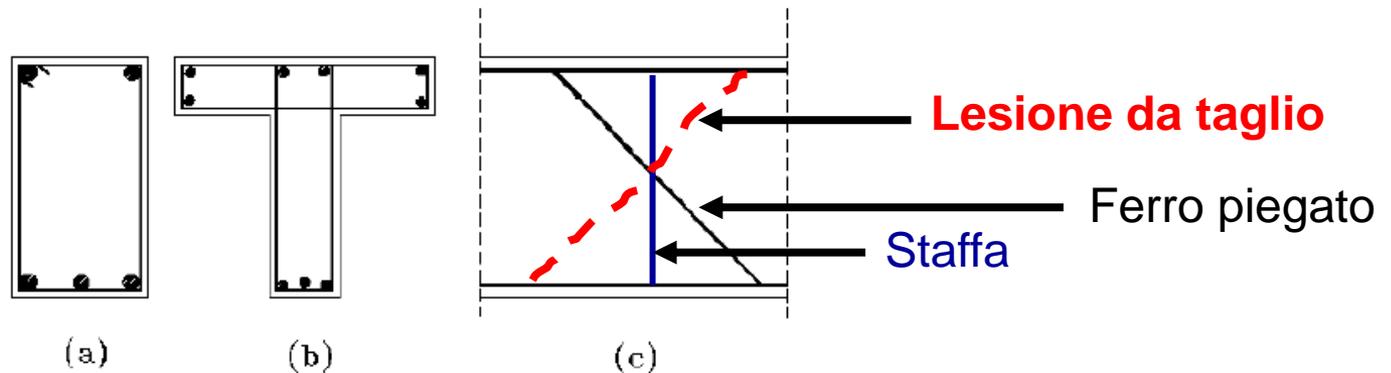
Comportamento ciclico
in presenza di un
elevato sforzo di taglio



Comportamento ciclico
in presenza di un
basso sforzo di taglio

Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

Nel sopportare gli sforzi di taglio un ruolo fondamentale è svolto dalle armature trasversali, ed in particolare dalle **staffe**, che si oppongono efficacemente al progredire delle lesioni inclinate dovute al taglio



Il meccanismo resistente del taglio si estende ad un tratto di trave, pertanto non è possibile effettuare uno studio sezione per sezione.

Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

Parametri che influenzano il comportamento di un elemento in c.a. sottoposto a taglio

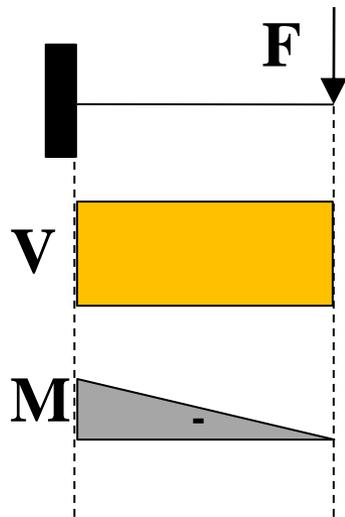
- Disposizione armature longitudinali
- Disposizione armature trasversali
- Aderenza acciaio-calcestruzzo
- Tipo e posizione dei carichi e dei vincoli
- Forma della sezione

Il Taglio negli elementi in c.a.: meccanismi di rottura

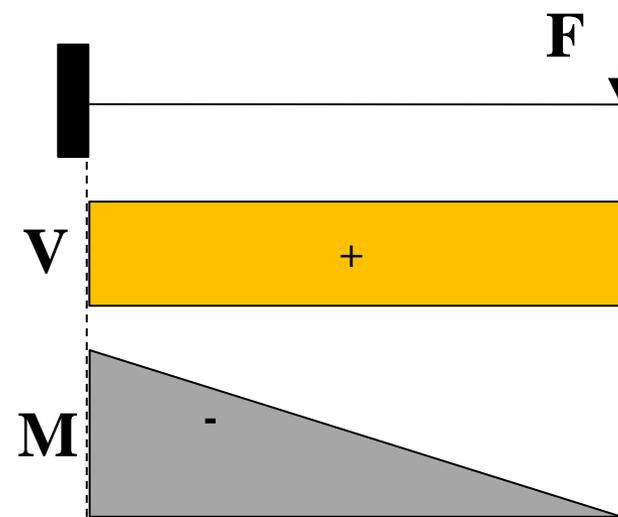
Il tipo di rottura dipende :

1. Dal valore assunto dal **rapporto** ($M / V h$) che commisura l'importanza del momento flettente M all'entità del taglio V per l'altezza della sezione h
2. Dalla **forma della sezione**

1. Ruolo del rapporto $M / V h$



Trave «corta»: $M / V h$ basso



Trave «lunga»: $M / V h$ elevato

Il Taglio negli elementi in c.a.: meccanismi di rottura

1. RUOLO DEL RAPPORTO $M / V h$

Per travi rettangolari esaminando numerose prove sperimentali sono stati individuati i seguenti campi di funzionamento:

- $(M / V h) < 1$ comportamento arco-tirante tipico di travi corte con rottura caratterizzata da schiacciamento del cls nella zona tra l'appoggio e le prime lesioni all'intradosso;
- $1 \leq (M / V h) \leq 3$ l'influenza del taglio predomina sull'azione del momento flettente: la rottura interviene in presenza di una manifesta fessurazione obliqua che si propaga da metà altezza della trave verso i bordi;
- $3 \leq (M / V h) \leq 7$ il momento è predominante con lesioni che si innescano quasi verticalmente in corrispondenza del lembo teso per poi propagarsi verso l'alto;
- $(M / V h) > 7$ l'influenza del taglio diventa praticamente trascurabile rispetto all'effetto del momento flettente.

Taglio negli elementi in c.a.: meccanismi di rottura e forma della sezione

Riepilogo meccanismi di rottura

$$M / V h \leq 3$$

rottura per taglio

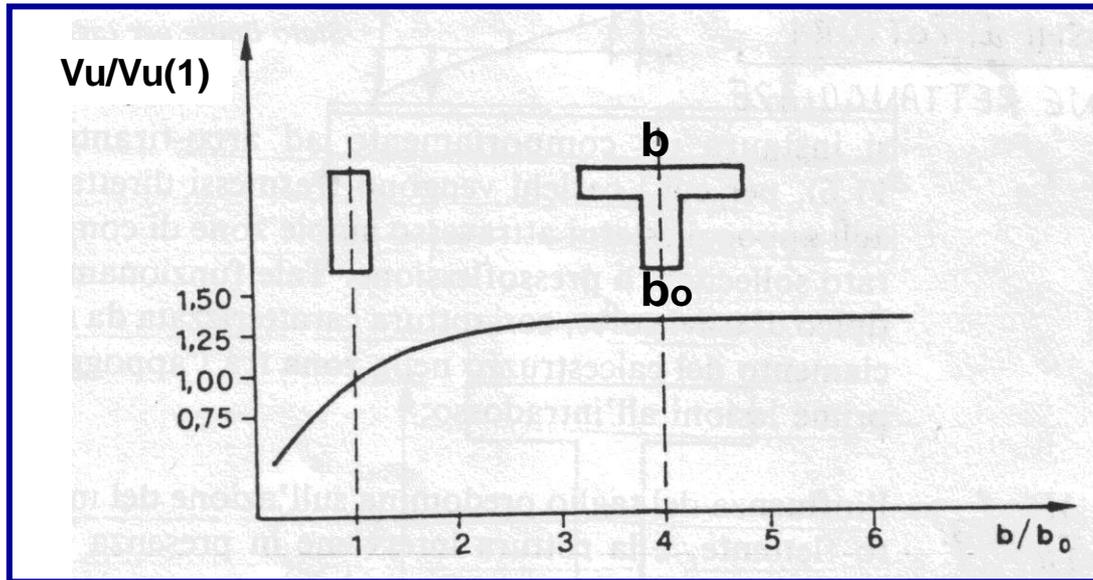
$$3 \leq (M / V h) \leq 7$$

rottura “mista” taglio-flessione

$$(M / V h) > 7$$

rottura per flessione

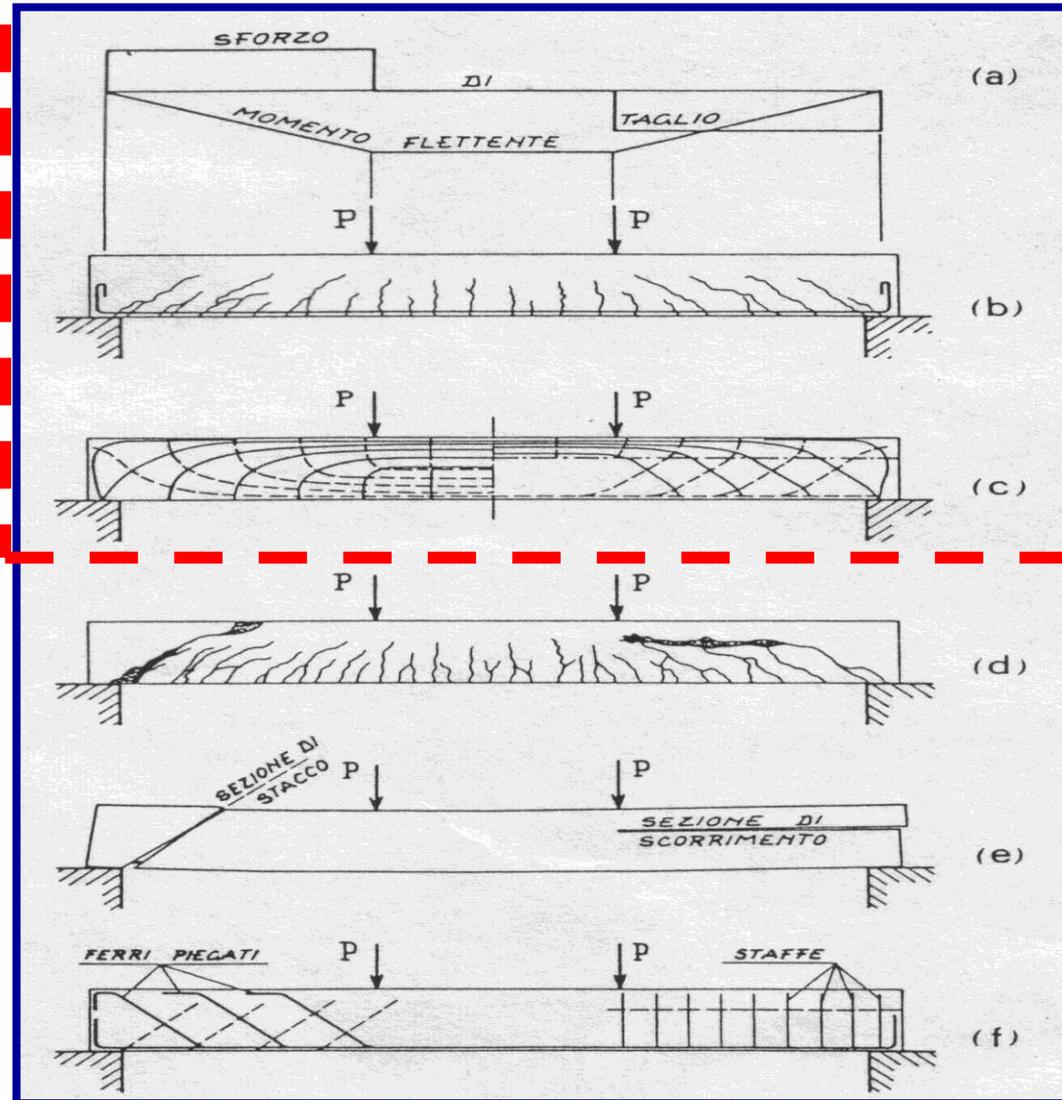
2. RUOLO DELLA FORMA DELLA SEZIONE



Il diagramma mostra che l'andamento del taglio ultimo V_u tende ad un asintoto orizzontale per valori di b/b_0 maggiori di 2.

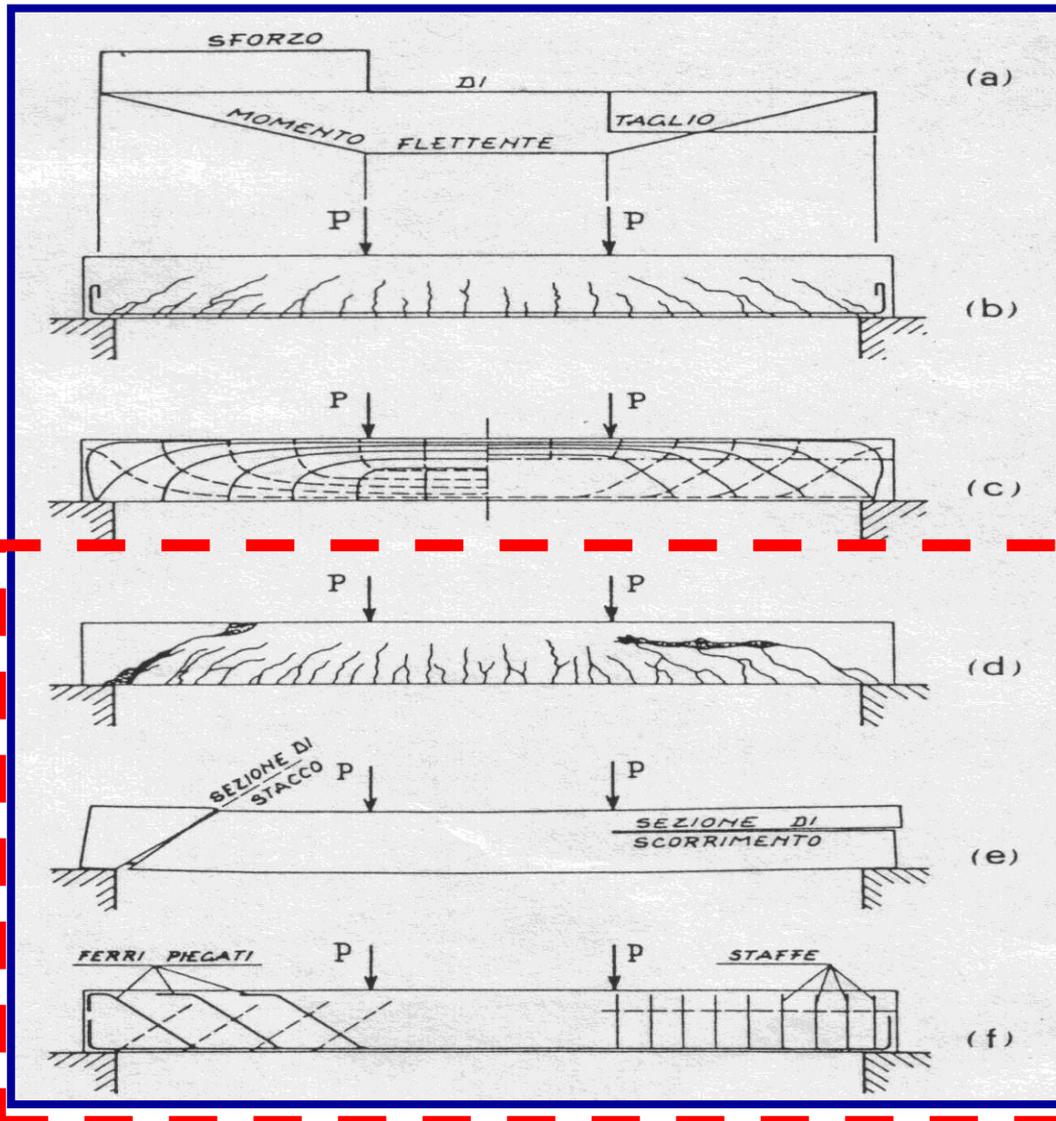
Vale $V_u(1) = V_u(b=b_0)$

Il Taglio negli elementi in c.a.: il comportamento sperimentale



- (a) Sollecitazioni agenti sulla trave
- (b) Possibile configurazione delle fessure estese a tutta la trave
- (c) Isostatiche di trazione (linee tratteggiate) e di compressione (linee continue)

Il Taglio negli elementi in c.a.: il comportamento sperimentale



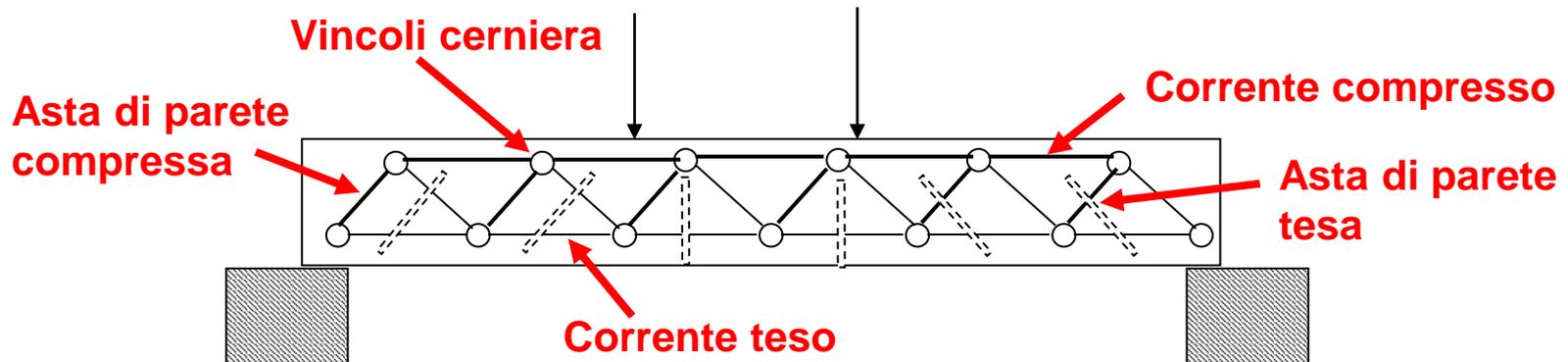
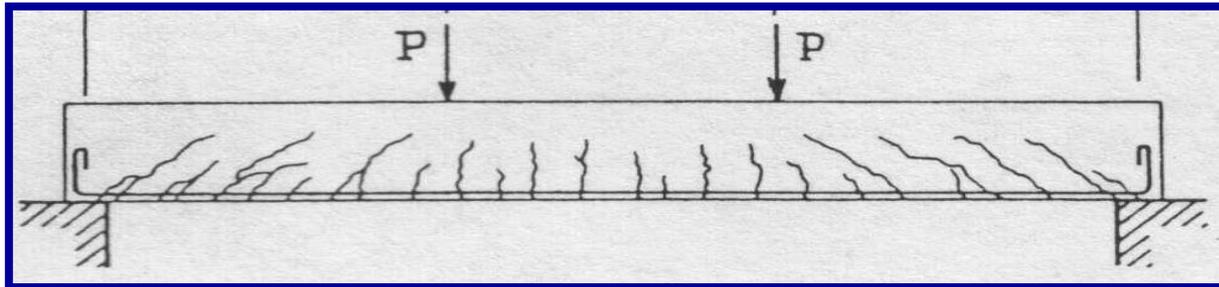
(d) Possibili meccanismi di crisi (alternativi):

- a sinistra completo distacco secondo la giacitura a 45° delle fessure da taglio;
- a destra crisi per tranciamento dei conci d'anima al livello del loro incastro nel corrente compresso con scorrimento longitudinale di una parte della trave rispetto all'altra.

(e) Schematizzazione della "sezione di stacco" trasversale (sin) e della sezione di scorrimento longitudinale (des); meccanismi possibili, alternativi tra loro.

(f) Armatura a taglio: staffe e/o ferri piegati (attenzione: armature valide per entrambi i meccanismi di crisi)

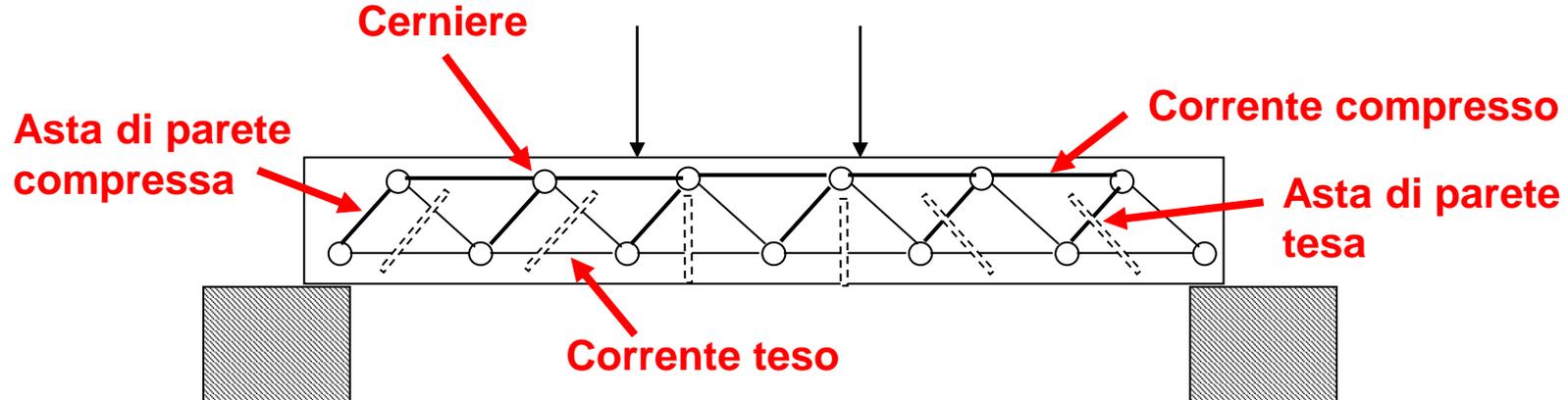
Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch



Il modello classico utilizzato per descrivere (con buona accuratezza) il comportamento a taglio di un elemento in c.a. armato a taglio è il cosiddetto **traliccio di Mörsch**, struttura reticolare costituita da:

- un **corrente compresso** (CLS non fessurato)
- un **corrente teso**
- un reticolo di **aste di parete** (puntoni di CLS compresso e armature a taglio tese) collegati ai due correnti con **vincoli cerniera** (ipotesi semplificatrice).

Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch



- Tutti gli elementi del traliccio di Mörsch sono considerati vincolati agli estremi da cerniere, ossia sono delle **bielle** soggette solo a sforzi assiali.
- Le aste di parete, considerate inclinate di 45° , sono costituite dalla parti di calcestruzzo compresso (tra due fessure) e dalle armature trasversali tese distribuite lungo la trave.
- **In assenza di armature trasversali il traliccio sarebbe labile.**

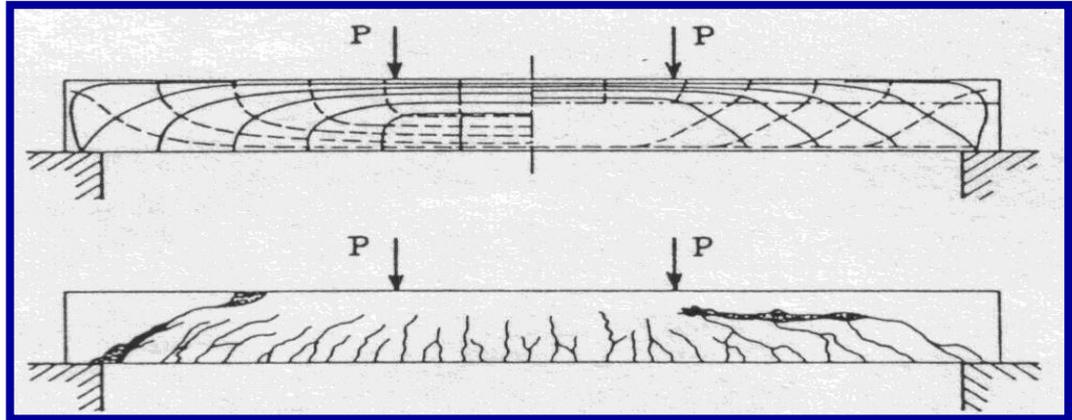
ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

In realtà, seppure il modello basato sul *traliccio di Mörsh* porti a dire che, in assenza di armature trasversali, il traliccio sarebbe labile, studi in campo sperimentale evidenziano che:

- anche elementi in c.a. privi di armature trasversali mostrano una resistenza a taglio non trascurabile, che deriva principalmente dalla resistenza a trazione del calcestruzzo, che nella “realtà” è piccola ma non nulla;
- la presenza di fessure da flessione (ossia superamento della resistenza a trazione nel CLS) non annulla la resistenza a taglio in quanto esistono una serie di altri contributi resistenti di cui è opportuno tenere conto nella definizione di un modello più rispondente alla realtà.

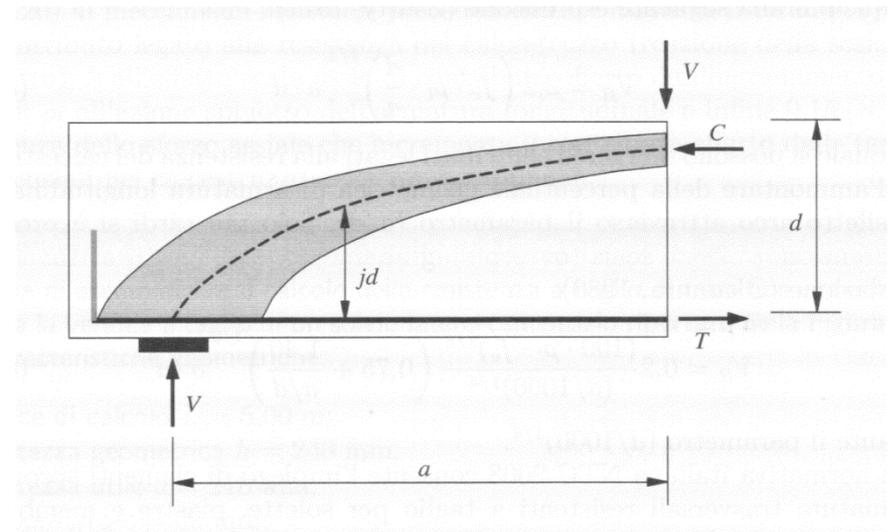
Infatti, in diverse applicazioni (per esempio i solai) è possibile realizzare elementi privi di apposita armatura a taglio, a patto che sussistano alcune condizioni previste dalle norme tecniche che trovano fondamento nei risultati forniti da indagini sperimentali.

ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti



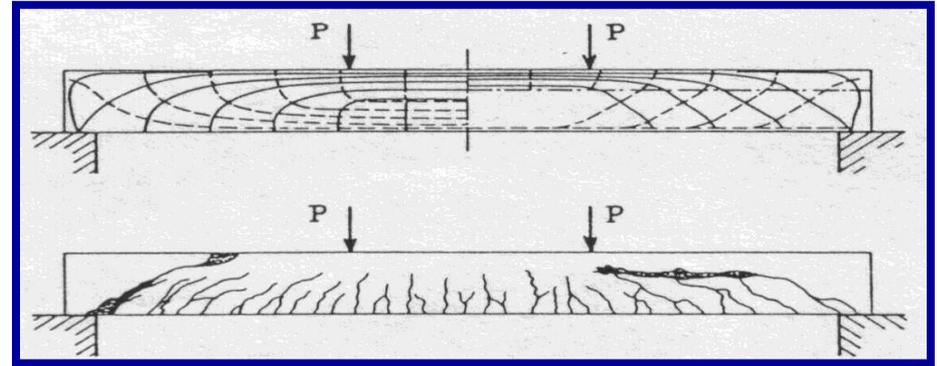
a) Effetto arco

- Il meccanismo ad arco consente di trasferire un'aliquota del taglio direttamente nella sezione di appoggio attraverso gli sforzi di compressione derivanti dalla formazione, lungo l'altezza della sezione, di un arco resistente.
- Tale effetto è funzione delle dimensioni geometriche, ed in particolare aumenta al diminuire del rapporto tra la luce di taglio ($a=M/V$) e l'altezza della sezione (d).



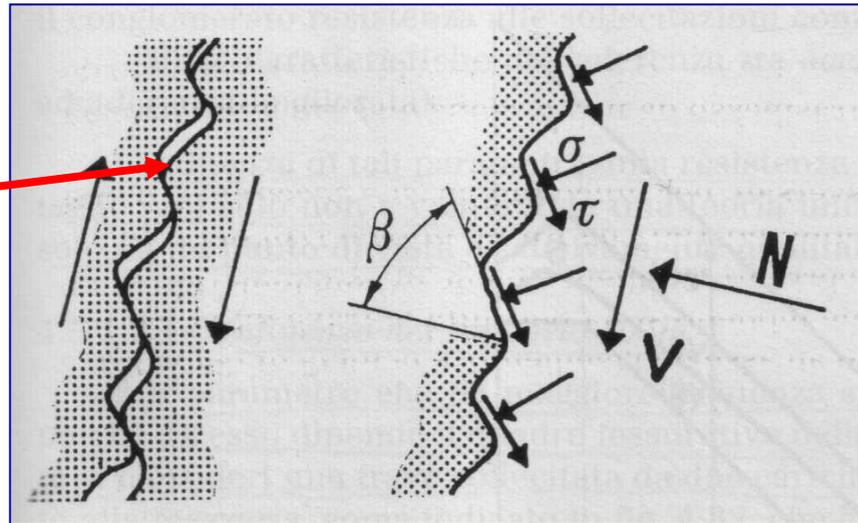
ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

b) Ingranamento degli inerti (aggregate interlock) V_b



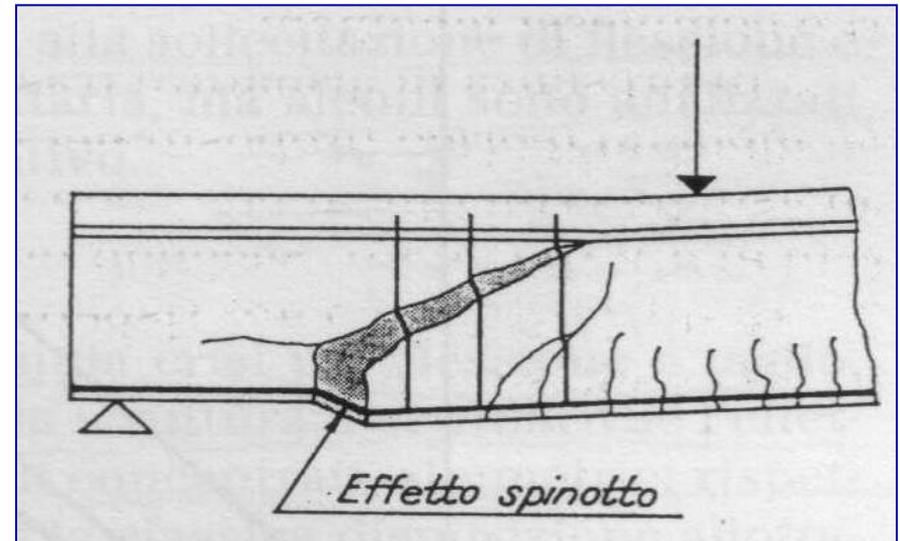
- Una quota V_b del taglio esterno è portata per ingranamento degli inerti, ossia per effetto della forza che si trasmette attraverso le superfici a contatto di una lesione inclinata quando i due lembi opposti tendono ad avere uno scorrimento relativo.
- E' un fenomeno di notevole rilevanza, specialmente in assenza di armature trasversali.

Lesione dovuta al taglio

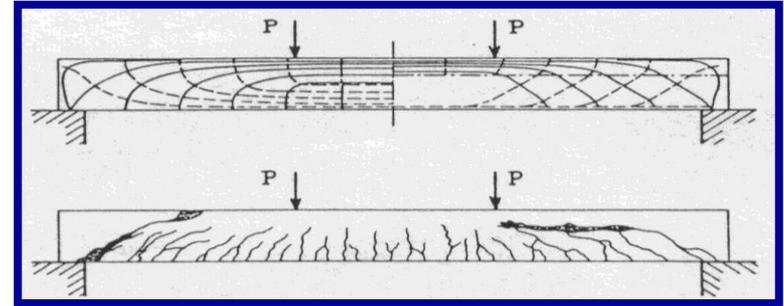


c) Effetto spinotto o bietta (dowel action) V_c

- una ulteriore quota V_c del taglio esterno viene portata dalle barre longitudinali di acciaio per il cosiddetto "effetto spinotto" (*dowel action*), ossia mediante la resistenza a taglio offerta dalle barre che attraversano la fessura, quando si verifica uno scorrimento relativo tra le facce di tale fessura.
- Tale contributo è funzione di numerosi fattori, tra i quali la rigidità del calcestruzzo al di sotto delle barre (copriferro) e la distanza tra la sezione in cui è presente la fessura e la staffa più vicina.
- In genere esplica un contributo di piccola entità ed inoltre, innescando lesioni di distacco lungo l'armatura longitudinale, può incrementare l'apertura delle lesioni inclinate riducendo l'effetto portante per ingranamento degli inerti.

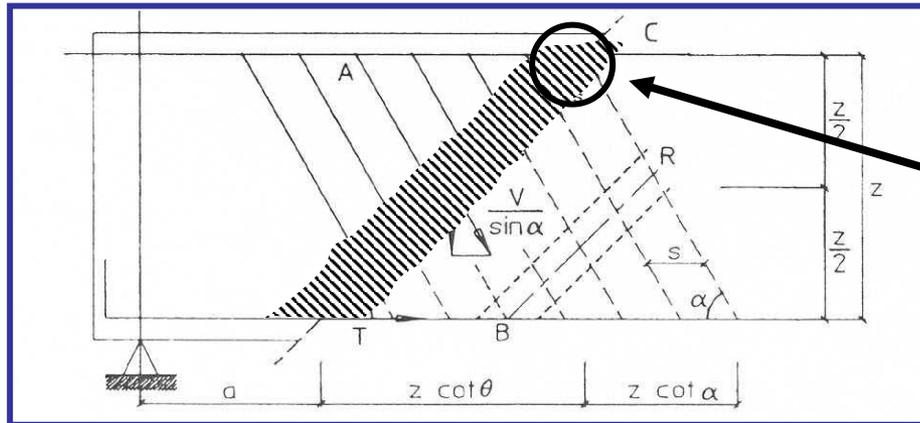


ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti



d) Bielle d'anima di CLS compresso V_a

- Un'aliquota V_a del taglio esterno viene portata direttamente dalle bielle di CLS compresso che si determinano tra due lesioni successive.
- Tali bielle risultano in realtà incastrate e non incernierate nel corrente superiore (come invece si ipotizza nel modello di Ritter-Morsch), per cui sono in grado di assorbire una parte della forza verticale che sollecita l'armatura trasversale (cosiddetto effetto pettine).
- Inoltre, è sperimentalmente dimostrato che le bielle hanno in genere una inclinazione minore di 45° , per cui si ha una ulteriore diminuzione delle tensioni nell'armatura trasversale.



bielle di cls
compresso
incastrate
(e non
incernierate)

Stato Limite ultimo per sollecitazioni di Taglio. Le verifiche

La verifica allo SLU per taglio è soddisfatta se: $V_{Rd} \geq V_{Ed}$

dove V_{Ed} è il valore dello sforzo di taglio agente e V_{Rd} è il taglio resistente.

Per **elementi senza armatura resistente a taglio** V_{Rd} è valutato con la seguente espressione (di derivazione sperimentale):

$$V_{Rd} = \left\{ 0.18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \geq (v_{\min} + 0.15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$$

d è l'altezza utile della sezione (mm)

b_w è la larghezza minima della sezione (mm)

$\rho_1 = A_{s1} / (b_w \cdot d)$ è il rapporto geometrico di armatura longitudinale (≤ 0.02)

$\sigma_{cp} = N_{Ed} / A_c$ è la tensione media di compressione nella sezione ($\leq 0.2f_{cd}$)

$$v_{\min} = 0.035k^{3/2}f_{ck}^{1/2}$$

$$k = 1 + (200 / d)^{1/2} \leq 2$$

Stato Limite ultimo per sollecitazioni di Taglio. Le verifiche

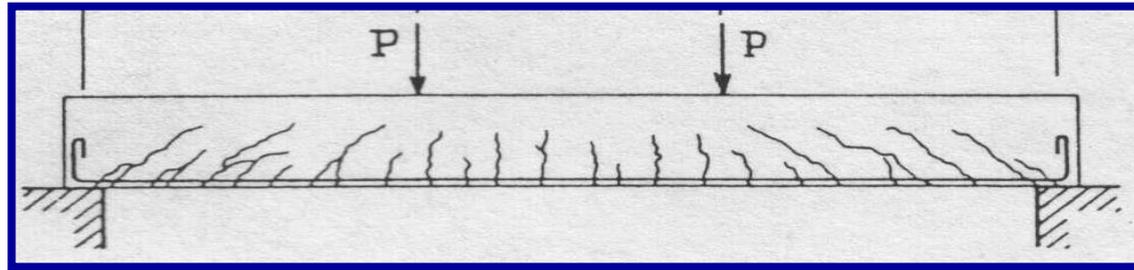
Elementi **SENZA** armatura resistente a taglio

È interessante osservare che nella relazione:

$$V_{Rd} = \left\{ 0.18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d$$

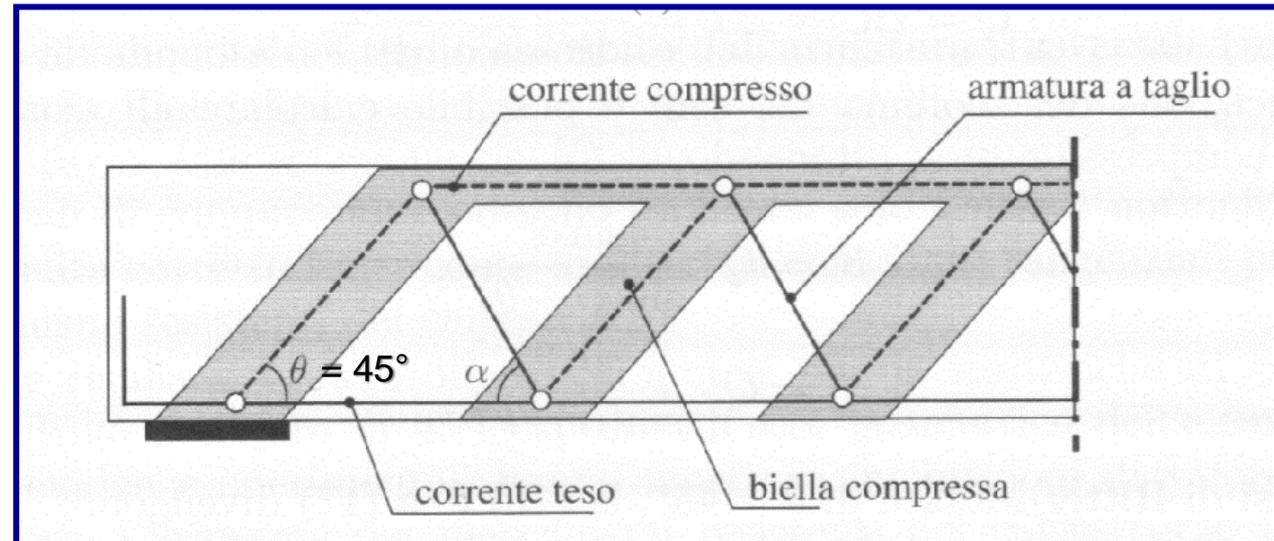
- $f_{ck}^{1/3}$ è il termine associato al meccanismo resistente alla sezione d'incastro della biella compressa;
- k è associato al contributo offerto dall'ingranamento degli inerti;
- ρ_l è associato all'effetto spinotto dell'armatura longitudinale;
- $0.15 \sigma_{cp}$ è associato alla presenza di uno sforzo normale di compressione, che aumenta il contributo delle tensioni tangenziali nella zona compressa di calcestruzzo.

Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch



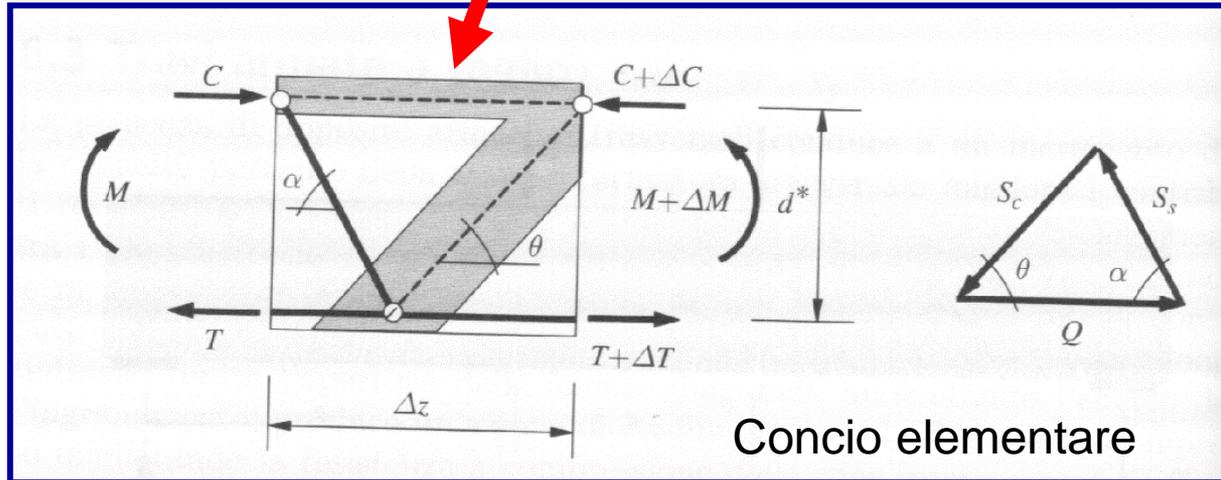
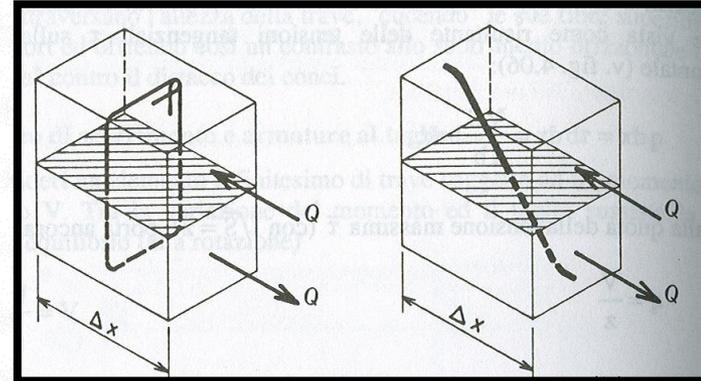
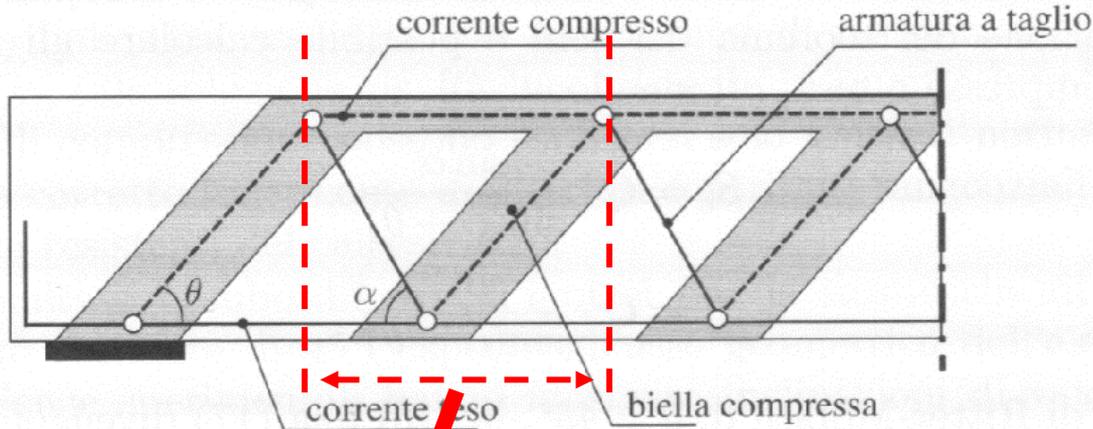
La trave è schematizzata con un **traliccio ideale** costituito da:

- bielle compresse inclinate di un angolo $\theta = 45^\circ$
- armature trasversali tese (ferri piegati o staffe) inclinate di un angolo α
- corrente superiore compresso
- corrente inferiore teso (armatura longitudinale inferiore).



Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch

Calcolo degli sforzi agenti sulla biella compressa e le armature trasversali



Concio elementare

Lo sforzo di scorrimento Q che si genera tra i correnti sup e inf è equilibrato da:

S_s = sforzo assorbito dalla biella tesa

S_c = sforzo assorbito dalla biella compressa

Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch

Nel concio di lunghezza Δz lo sforzo di scorrimento in corrispondenza dell'asse neutro vale:

$$Q = (C + \Delta C) - C = (T + \Delta T) - T = \frac{\Delta M}{d^*} = \frac{V}{d^*} \Delta z \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{V}{d^*} \Delta z$$

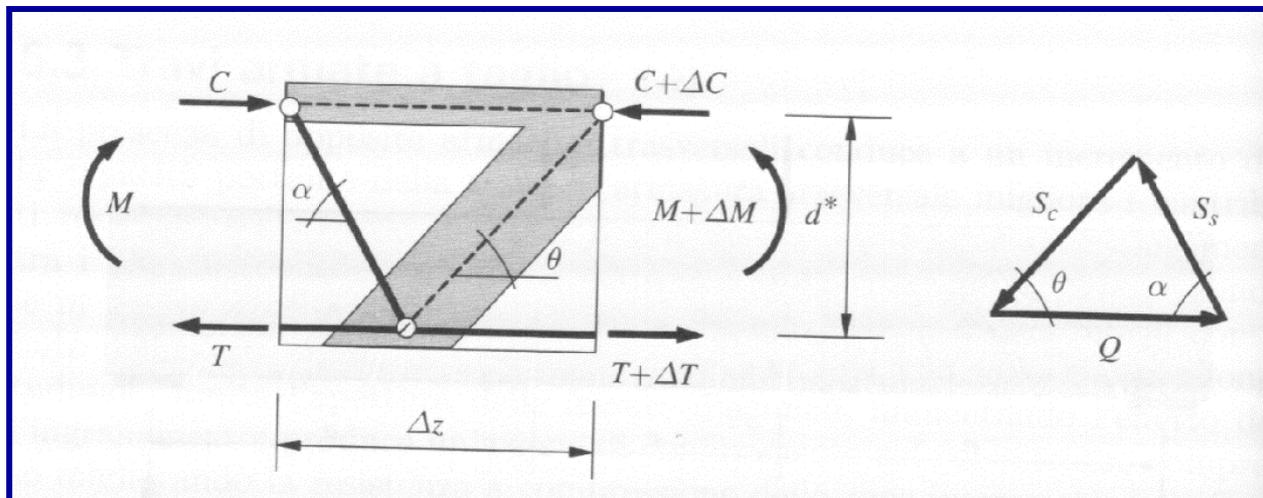
Applicando il *teorema dei seni* al poligono di forze **Q-S_c-S_s** si ha:

$$S_c = Q \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \Delta z}{d^*} \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

Sforzo nella biella compressa

$$S_s = Q \frac{\text{sen} \theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \Delta z}{d^*} \frac{\text{sen} \theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

Sforzo nella biella tesa



Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch

$$S_c = Q \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

Sforzo nella biella compressa

$$S_s = Q \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

Sforzo nella biella tesa

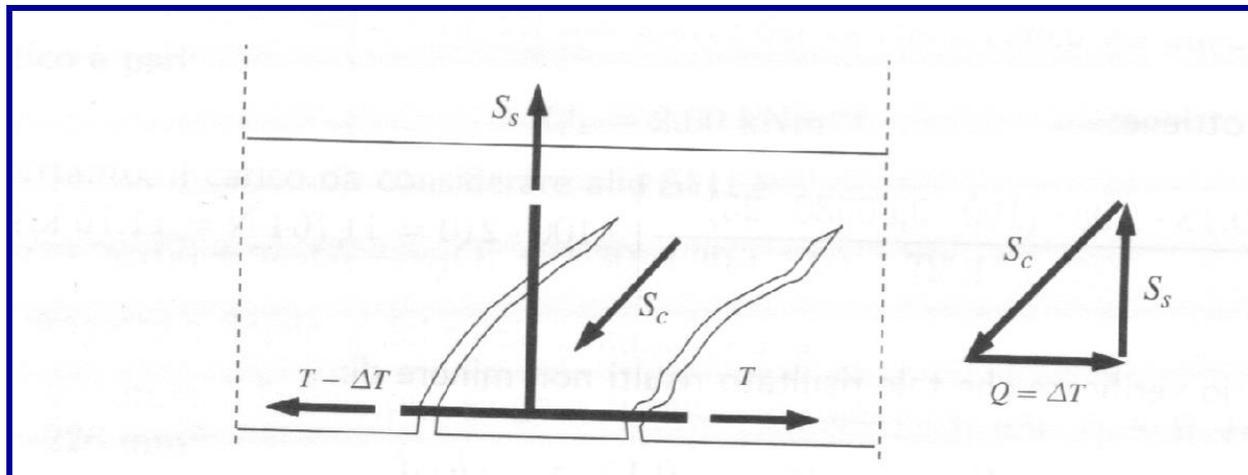
Le espressioni si particularizzano per $\theta = 45^\circ$ (ipotesi del modello di **Ritter-Mörsch**) ed in presenza di **staffe** ($\alpha = 90^\circ$):

$$S_c = \sqrt{2}Q$$

Sforzo nella biella compressa

$$S_s = Q$$

Sforzo nella biella tesa

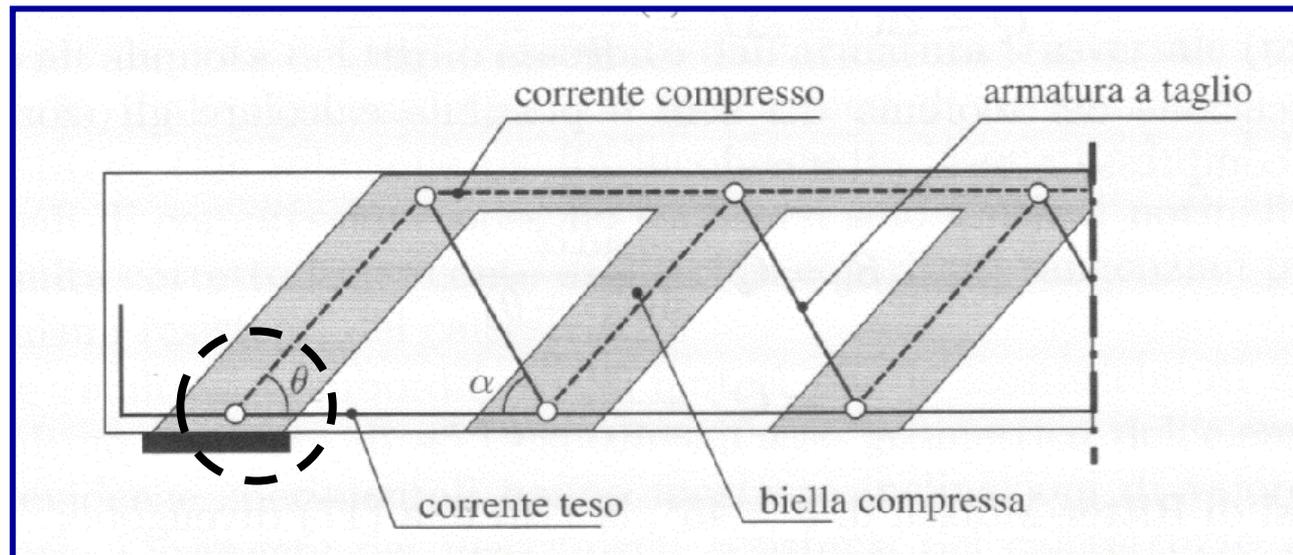


Elementi **armati** a taglio: **il modello ad inclinazione variabile**

La trave è schematizzata con un **traliccio** in cui il **valore dell'angolo θ NON È COSTANTE** ma varia in funzione delle caratteristiche geometriche e resistenti della sezione.

Il modello di calcolo è analogo a quello di Ritter-Morsch, ossia:

- **bielle di cls compresse** inclinate di un angolo θ
- **bielle di acciaio** tese inclinate di un angolo α (armature trasversali)
- **corrente superiore compresso** (cls delimitato dall'asse neutro)
- **corrente inferiore teso** (barre di acciaio longitudinali)



Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO

La verifica allo SLU per elementi con armatura trasversale resistente a taglio è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove:

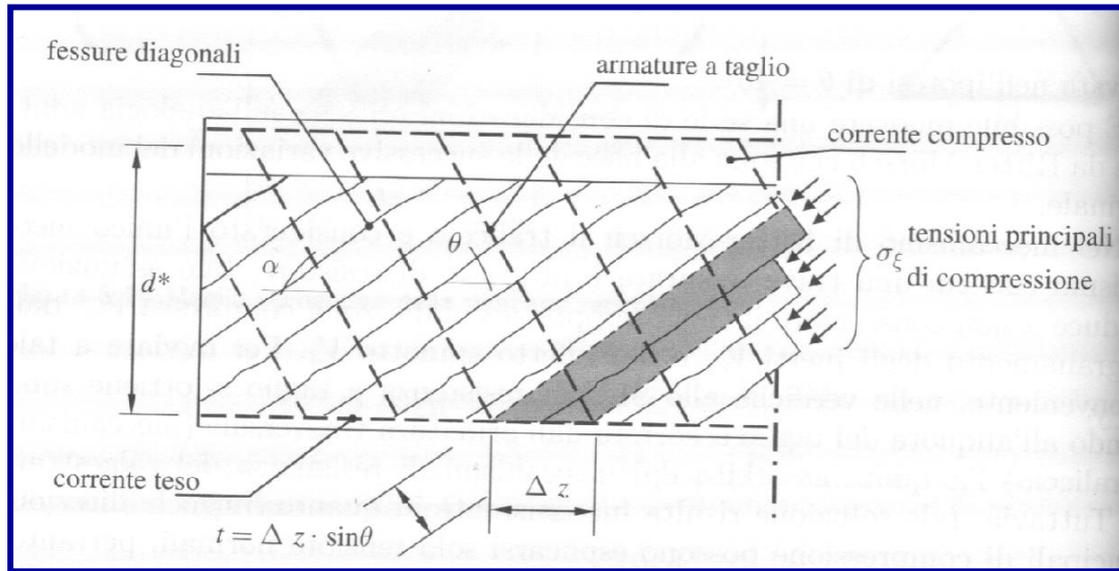
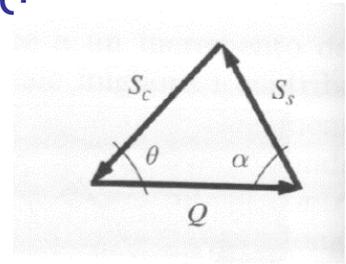
- V_{Ed} è il valore dello sforzo di taglio agente
- V_{Rd} è il taglio resistente pari al **mimino** tra il valore del **taglio “compressione”** V_{Rcd} (crisi della biella di cls) e **taglio “trazione”** V_{Rsd} (crisi della biella di armatura):

$$V_{Rd} = \min (V_{Rcd}; V_{Rsd})$$

Il taglio “compressione”

In analogia con quanto determinato per il modello di Ritter-Mörsch lo sforzo agente S_c nella biella compressa è valutato attraverso:

$$S_c = Q \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V \cdot \Delta z}{d^*} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)}$$



La crisi nella biella di cls è raggiunta quando lo sforzo agente S_c eguaglia (o supera) la **resistenza della biella** S_{cd} , valutata attraverso la seguente espressione:

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \sin \theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}$$

Il taglio “compressione”

Nell'espressione di S_{cd} la simbologia utilizzata ha il seguente significato:

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen}\theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}$$

v coefficiente che tiene conto della reale distribuzione delle tensioni ($v = 0.5$ nelle NTC2018)

b larghezza minima della sezione;

f_{cd} resistenza di calcolo a compressione del cls;

θ angolo di inclinazione delle bielle di cls, che nella NTC2018 deve rispettare la seguente limitazione: $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

α_c coefficiente maggiorativo che tiene conto della presenza/assenza dello sforzo normale. Nella NTC2018 è assunto pari a:

1 *per membrature non compresse*

$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$ $0 \leq \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}$

$1,25$ $0.25f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5f_{cd}$

$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$ $0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

σ_{cp} tensione media di compressione della sezione.

Il taglio “compressione”

Il valore del taglio “compressione” (crisi lato cls compresso: **taglio resistente** V_{Rcd}) si ottiene eguagliando lo sforzo agente nel puntone S_c con quello resistente S_{cd} :

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen}\theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd} = S_c = Q \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \cdot \Delta z}{d^*} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

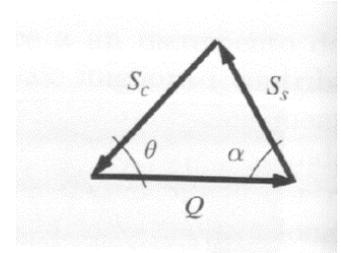
$$V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\text{cota}\alpha + \text{cot}\theta}{1 + \text{cot}^2\theta}$$

Taglio “compressione” resistente

Il taglio “trazione”

In analogia con quanto determinato per il modello di Ritter-Mörsch lo sforzo agente nella biella tesa è valutato attraverso:

$$S_s = Q \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)}$$



La crisi nelle bielle di acciaio è raggiunta quando lo sforzo S_s eguaglia (o supera) la resistenza della biella tesa (armature trasversali a taglio), valutata attraverso:

$$S_{sd} = \frac{A_{sw} \cdot \Delta z}{s} f_{yd}$$

A_{sw} area della singola armatura trasversale (nel caso di staffe è uguale all'area della singola barra per il numero di braccia);

s distanza tra due armature trasversali consecutive (passo)

f_{yd} tensione di snervamento di calcolo dell'acciaio

Il taglio “trazione”

Il valore del taglio “trazione” (crisi lato acciaio teso: **taglio resistente** V_{Rsd}) si ottiene eguagliando lo sforzo agente nella biella tesa S_s con quello resistente S_{sd} :

$$S_s = Q \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)} = S_{sd} = \frac{A_{sw} \cdot \Delta z}{s} f_{yd}$$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \sin\alpha \cdot (\cot\alpha + \cot\theta)$$

Taglio “trazione” resistente

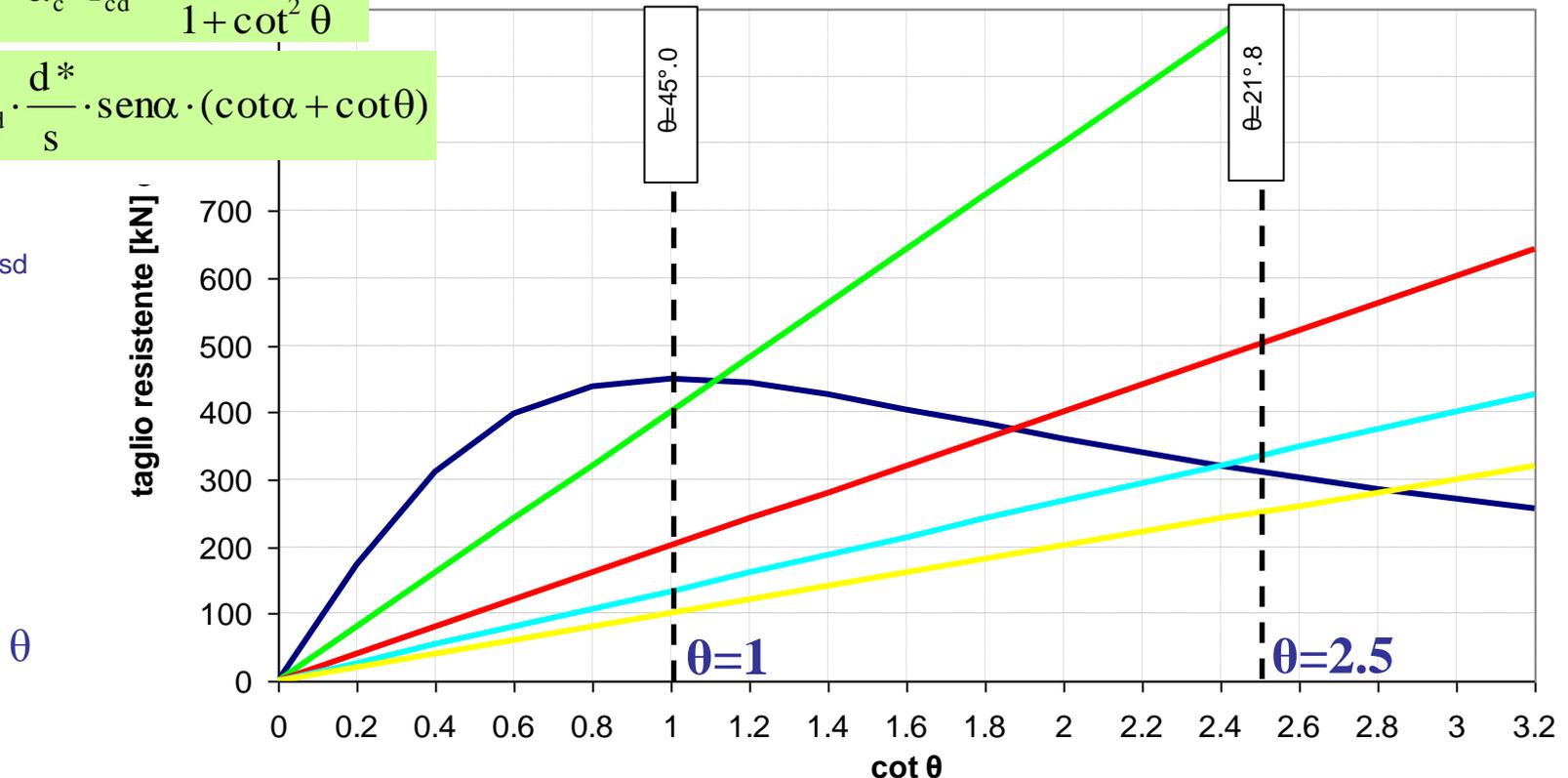
Il taglio “trazione” – “compressione”

Funzioni del taglio resistente “compressione” – “trazione”

$$V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot \nu \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)$$

(il taglio resistente V_{Rsd} è calcolato ipotizzando l'utilizzo di staffe, ossia $\alpha=90^\circ$)



— V_{rcd} (300 x 600mm)

— V_{rsd} ($A_{sw} = 100\text{mm}^2, s = 70\text{mm}$)

— V_{rsd} ($A_{sw} = 100\text{mm}^2, s = 100\text{mm}$)

— V_{rsd} ($A_{sw} = 100\text{mm}^2, s = 150\text{mm}$)

— V_{rsd} ($A_{sw} = 100\text{mm}^2, s = 200\text{mm}$)

Il taglio “compressione” - “trazione”

In una sezione in c.a. con armatura a taglio la crisi contemporanea del cls e dell'acciaio avviene in corrispondenza di un valore dell'angolo θ valutato attraverso l'uguaglianza tra il taglio “compressione” V_{Rcd} e il taglio “trazione” V_{Rsd}

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \sin\alpha \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) = V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot\alpha + \cot\theta}{1 + \cot^2\theta}$$

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin\alpha} - 1}$$

La norma NTC2018 impone che il valore di $\cot\theta$ deve rispettare la seguente limitazione: $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO (§ 4.1.2.3.5, NTC2018)

Taglio “compressione”

La resistenza delle bielle compresse di CLS si valuta attraverso la seguente espressione:

$$V_{Rcd} = 0.9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_C \cdot f'_{cd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) / (1 + \cot^2 \theta)$$

b_w è la larghezza minima della sezione;

d è l'altezza utile della sezione;

σ_{cp} è la tensione media di compressione della sezione;

α angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;

f'_{cd} resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ($f'_{cd} = 0,5 \times f_{cd}$);

θ angolo di inclinazione delle bielle di cls $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

α_C coefficiente maggiorativo pari a:

1	per membrature non compresse
$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$	$0 \leq \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}$
1,25	$0.25f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5f_{cd}$
$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	$0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO (§ 4.1.2.1.3, NTC2018)

Taglio “trazione”

La resistenza delle armature trasversali si valuta attraverso la seguente espressione:

$$V_{Rsd} = 0.9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \text{sen}\alpha$$

- A_{sw} area dell'armatura trasversale;
 d altezza utile della sezione;
 s interasse tra due armature trasversali consecutive;
 α angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;
 f_{yd} resistenza di calcolo dell'acciaio;
 θ angolo di inclinazione delle bielle di cls $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO (§ 4.1.2.3.5, NTC2018)

La verifica allo SLU per elementi con armature trasversale resistente a taglio è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove:

- V_{Ed} è il valore dello sforzo di taglio agente
- V_{Rd} è il taglio resistente pari al minimo tra il valore del taglio “compressione” V_{Rcd} (puntone di CLS) e taglio “trazione” V_{Rsd} (biella di armatura tesa):

$$V_{Rd} = \min (V_{Rcd}; V_{Rsd})$$

Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

La valutazione del taglio resistente di una sezione in c.a. armata a taglio prevede:

1) determinazione della cotangente dell'angolo di inclinazione θ delle bielle compresse

Tale operazione si effettua uguagliando il taglio “trazione” e il taglio “compressione”

$$V_{Rcd} = V_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin\alpha} - 1}$$

2) controllo del rispetto del limite di normativa e determinazione del taglio resistente V_{Rd}

Bisogna controllare che il valore di $\cot\theta$ rientri nei limiti previsti dalla norma NTC2018: $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

In funzione del valore calcolato di $\cot\theta$, il valore del taglio resistente V_{Rd} è valutato attraverso:

caso a): $1 \leq \cot\theta \leq 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = V_{Rcd}(\cot\theta) = V_{Rsd}(\cot\theta)$

crisi contemporanea CLS e armatura

caso b): $\cot\theta > 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|\cot\theta=2.5}; V_{Rcd|\cot\theta=2.5}) = V_{Rsd}(\cot\theta = 2.5)$

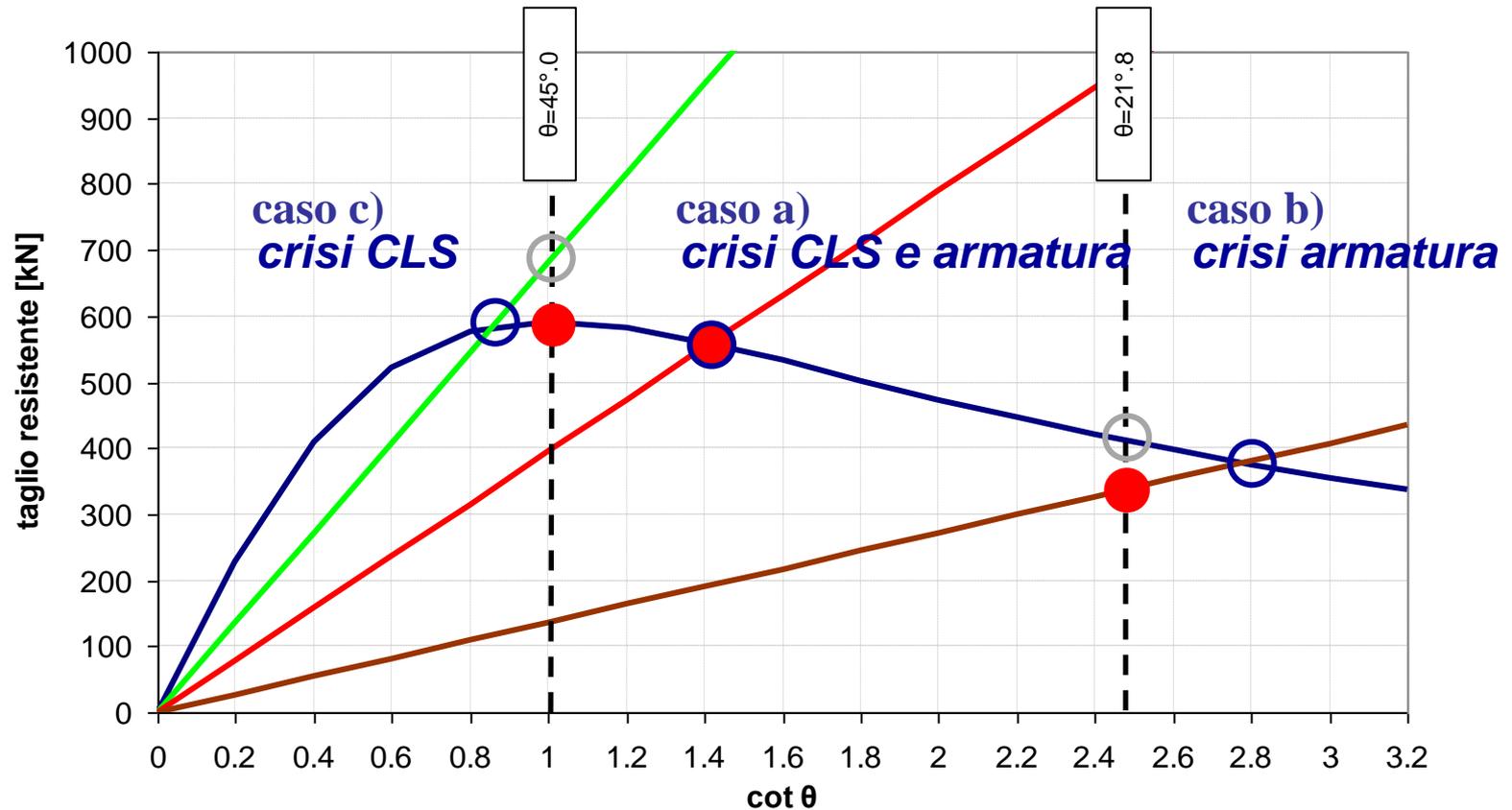
crisi armatura

caso c): $\cot\theta < 1 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|\cot\theta=1.0}; V_{Rcd|\cot\theta=1.0}) = V_{Rcd}(\cot\theta = 1.0)$

crisi calcestruzzo

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin\alpha} - 1}$$

Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

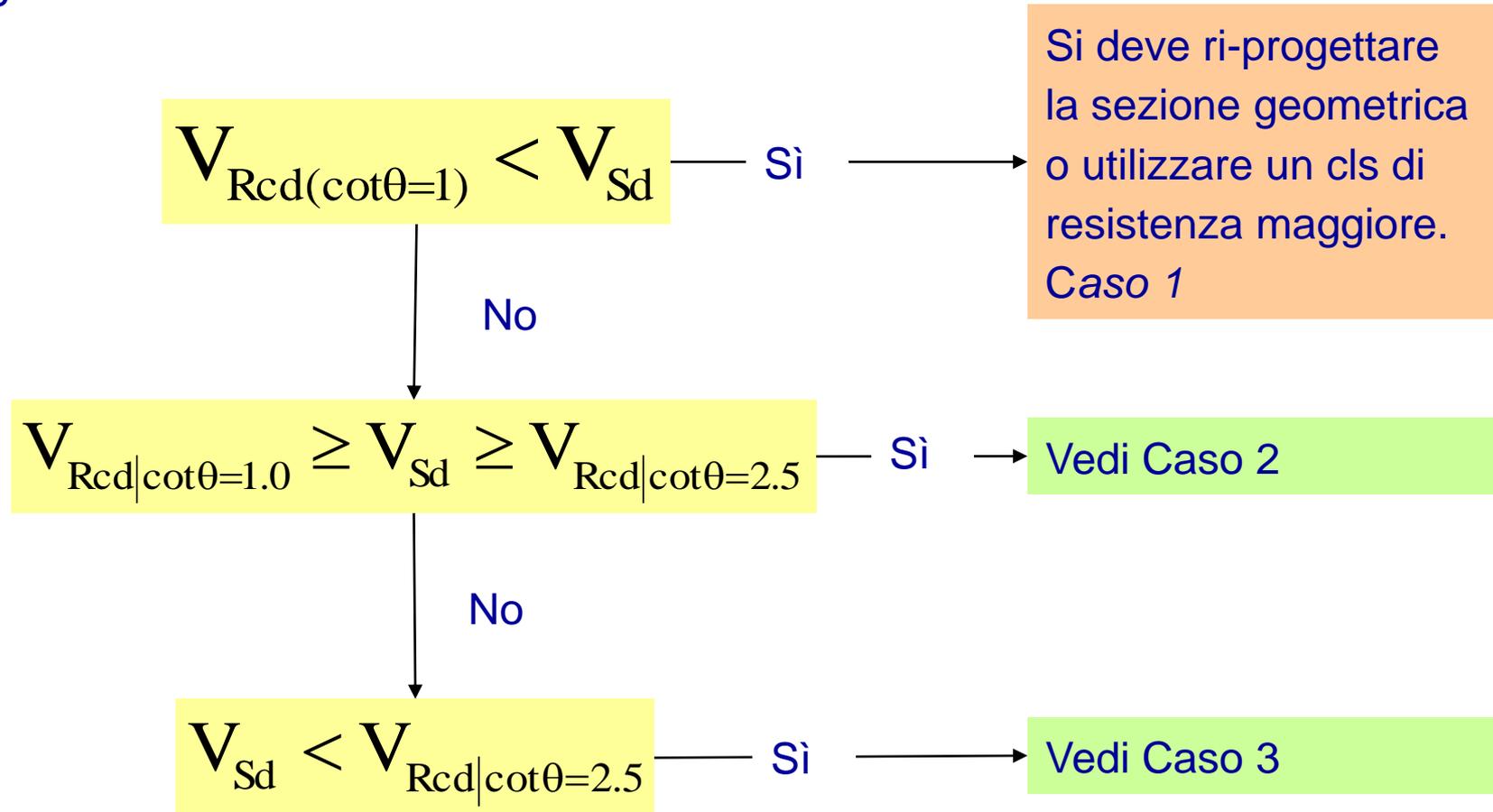


— Funzione taglio “compressione”, V_{Rcd}

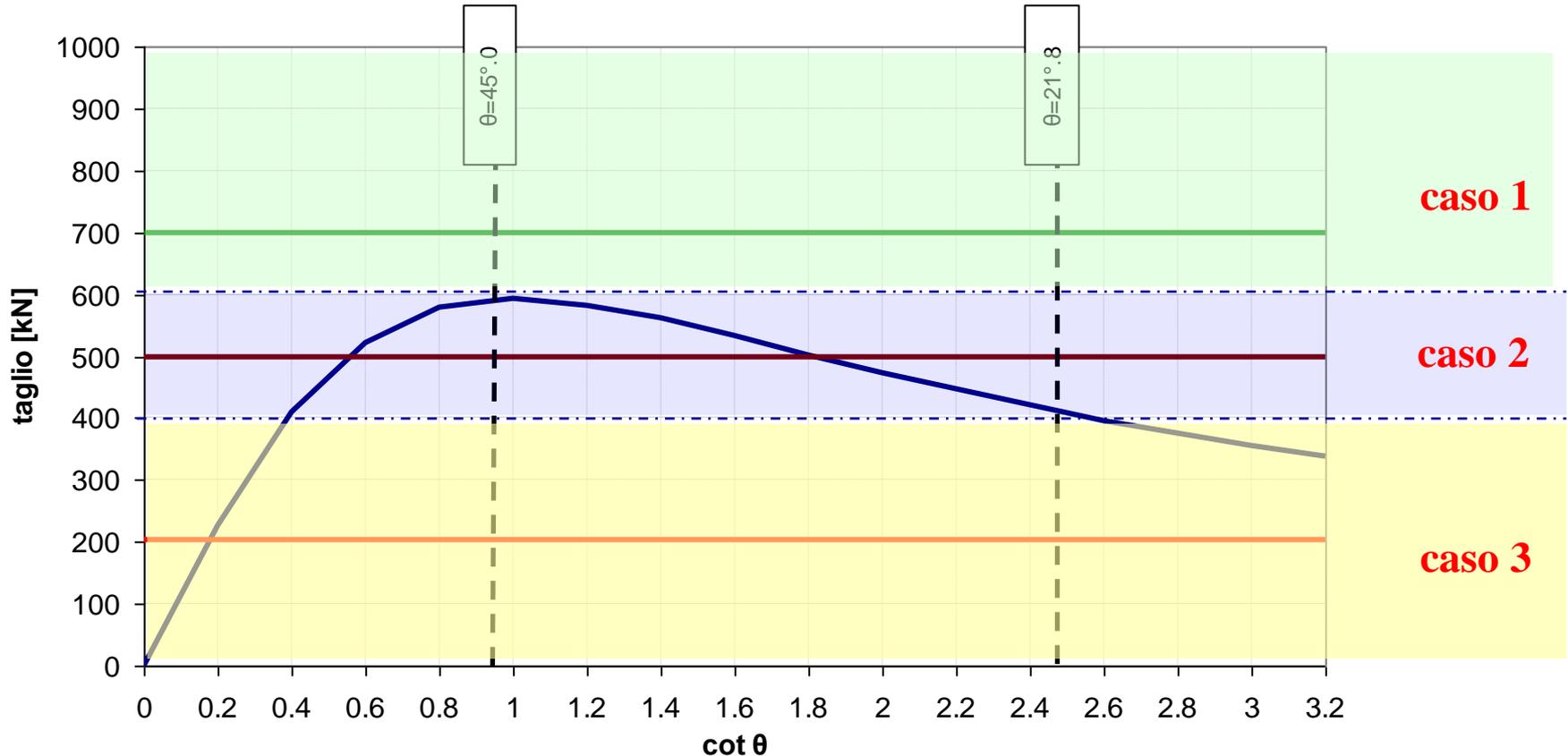
— Funzioni taglio resistente “trazione”, V_{Rsd} (al variare di A_{sw}/s)

Il Progetto delle armature

Per la **progettazione delle armature a taglio** si procede secondo il seguente schema:



Il Progetto delle armature



— Funzione taglio “compressione”, V_{red}

— Valori di Taglio agente V_{sd}

Il Progetto delle armature

Caso 2:

$$V_{Rcd|cot\theta=1.0} \geq V_{Sd} \geq V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

Il valore della $\cot\theta$ è valutato attraverso l'uguaglianza tra il taglio agente V_{Sd} e quello resistente del cls V_{Rcd} (taglio "compressione") :

$$V_{Rcd} = V_{Sd} \Rightarrow \cot\theta = f(V_{Sd}, d, b_w, \alpha_C, f'_{cd}, \cot\alpha)$$

Noto il valore di $\cot\theta$ l'armatura a taglio è determinata attraverso l'uguaglianza tra il taglio agente V_{Sd} e quello resistente "trazione" V_{Rsd} , dove l'unica incognita è il rapporto A_{sw}/s .

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \sin\alpha}$$

A_{sw}

area dell'armatura trasversale

s interasse tra due armature trasversali consecutive

Il Progetto delle armature

Caso 3:

$$V_{Sd} < V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

Il progetto dell'armatura a taglio (rapporto A_{sw}/s) viene eseguito imponendo l'uguaglianza tra il taglio agente V_{Sd} e quello resistente dell'armatura V_{Rsd} (taglio "trazione") in corrispondenza di $\cot\theta = 2.5$:

$$V_{Sd} = V_{Rsd|cot\theta=2.5} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\cot\alpha + 2.5)$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + 2.5) \cdot \text{sen}\alpha}$$

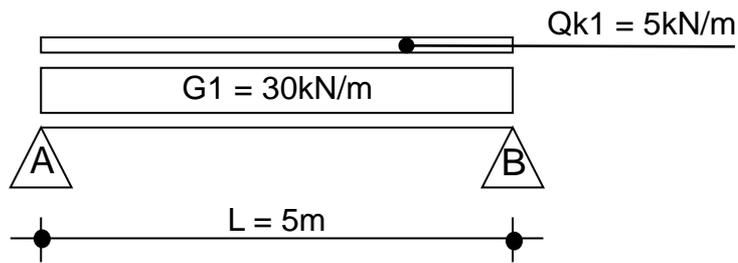
A_{sw}

area dell'armatura trasversale

s interasse tra due armature trasversali consecutive

S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

Esempio di VERIFICA a taglio (SLU)



Combinazione di calcolo delle azioni

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1} = 1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5 = 46.5 \text{ kN/m}$$

Analisi delle sollecitazioni

$$V_{sd}(A, B) = (\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1}) \cdot L / 2 = (1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5) \cdot 5 / 2 = 116.25 \text{ kN}$$

Resistenze di calcolo

$$\text{cls: } f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_C = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{acciaio: } f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S = 450 / 1.15 = 391.3 \text{ N/mm}^2$$

Dati del problema:

*sezione trave: rettangolare b=300mm;
H=500mm*

*classe di resistenza cls: C20/25
(fck=20N/mm²)*

*tipo armatura resistente a taglio: staffe
verticali ($\alpha=90^\circ$)*

*area staffe: Ø8 passo (s) 20cm a due braccia
(Asw=2 x 50mm²=100mm²)*

acciaio per c.a.: B450C (fyk=450N/mm²)

S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

determinazione della cotangente dell'angolo di inclinazione θ delle bielle di cls

$$V_{Rcd} = V_{Rsd} \Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{s \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha} - 1 \Rightarrow \cot \theta = 3.10$$

controllo del rispetto del limite di normativa e determinazione del taglio resistente V_{Rd}

caso a): $1 \leq \cot \theta \leq 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = V_{Rcd} = V_{Rsd}$

caso b): $\cot \theta > 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|_{\cot \theta = 2.5}}; V_{Rcd|_{\cot \theta = 2.5}})$

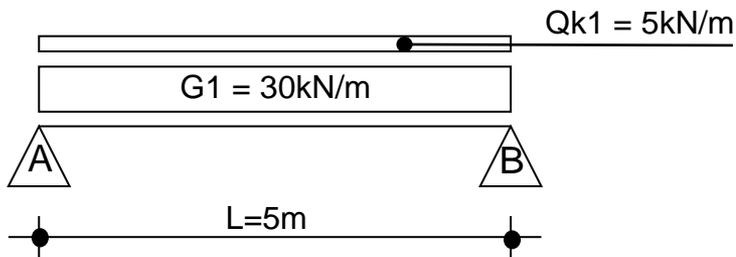
caso c): $\cot \theta < 1 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|_{\cot \theta = 1.0}}; V_{Rcd|_{\cot \theta = 1.0}})$

$\cot \theta = 3.10 > 2.5 \Rightarrow \text{caso 2}$

$V_{Rd} = V_{Rsd|_{\cot \theta = 2.5}} = 207.96 \text{ kN} > 116.25 \text{ kN} = V_{Sd} \Rightarrow \text{VERIFICATO}$

S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

Esempio di PROGETTO a taglio (SLU)



Dati del problema:

*sezione trave: rettangolare $b=300\text{mm}$;
 $H=500\text{mm}$*

*classe di resistenza cls: C20/25
($f_{ck}=20\text{N/mm}^2$)*

tipo armatura resistente a taglio: staffe verticali

acciaio per c.a.: B450C ($f_{yk}=450\text{N/mm}^2$)

Combinazione di calcolo delle azioni

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1} = 1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5 = 46.5\text{kN/m}$$

Analisi delle sollecitazioni

$$V_{sd}(A, B) = (\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1}) \cdot L/2 = (1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5) \cdot 5/2 = 116.25\text{kN}$$

Resistenze di calcolo

cls: $f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_C = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.3\text{N/mm}^2$

acciaio: $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S = 450 / 1.15 = 391.3\text{N/mm}^2$

S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

controllo del caso di calcolo

Caso 1

$$V_{Rcd|cot\theta=1} > V_{Sd} \Rightarrow 0.9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_C \cdot f'_{cd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) / (1 + \cot^2\theta) = 371.18 > 116.25 \text{ kN} = V_{Sd}$$

Caso 2

$$V_{Rcd|cot\theta=1.0} \geq V_{Sd} \geq V_{Rcd|cot\theta=2.5} \Rightarrow V_{Rcd|cot\theta=1.0} = 371.18, V_{Rcd|cot\theta=2.5} = 207.96 > V_{Sd} = 116.30 \text{ kN}$$

Caso 3

$$V_{Sd} < V_{Rcd|cot\theta=2.5} \Rightarrow V_{Sd} = 116.25 < 207.96 \text{ kN} = V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

Determinazione dell'armatura trasversale per il caso 3

$$V_{Sd} = V_{Rsd|cot\theta=2.5} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot 2.5 \Rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot 2.5}$$

S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

dimensionamento dell'armatura trasversale (ipotesi: staffe $\varnothing 8$ a due braccia
($A_{sw} = 2 \times 50\text{mm}^2 = 100\text{mm}^2$))

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0.28 \Rightarrow s = \frac{A_{sw}}{0.28} = 357\text{mm}$$

minimo da regolamento (NTC18)

Area staffe minima:

$$A_{sw} = 1.5 \times b_w = 1.5 \times 300 = 450\text{mm}^2/\text{m}$$

Minimo 3 staffe per metro

Passo staffa massimo $0.8 \times d =$

→ **s = 220mm**

→ **s = 330mm**

→ **s = 416mm**

**S_{min} =
220mm**